MODELISATION DU PHENOMENE DE FLUAGE ET DE RELAXATION DES MATERIAUX A MEMOIRE

Ali Kahamel

▶ **To cite this version:**

Ali Kahamel. MODELISATION DU PHENOMENE DE FLUAGE ET DE RELAXATION DES MATERIAUX A MEMOIRE. Mécanique [physics]. 2013. hal-00990722

HAL Id: hal-00990722
https://auf.hal.science/hal-00990722

Submitted on 14 May 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DE NGAOUNDERE
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
BP 454 Ngaoundéré

THE UNIVERSITY OF NGAOUNDERE
FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF PHYSICS
P.O. Box 454 Ngaoundéré

MEMOIRE DE MASTER RECHERCHE DE PHYSIQUE

Spécialité : Mécanique et Matériaux

MODELISATION DU PHENOMENE DE FLUAGE ET DE RELAXATION DES MATERIAUX A MEMOIRE

Présenté par :

KAHAMEL ALI

Matricule : **07L189FS**

N° 20130034/UN/CDPHYS

Soutenu publiquement le 10 Avril 2013 devant le Jury composé de:

Pr. KUITCHE Alexis	Université de Ngaoundéré	**Président**
Pr. BEDA TIBI	Université de Ngaoundéré	**Rapporteur**
Dr. NTAMACK Guy Edgar	Université de Ngaoundéré	**Examinateur**

Année académique 2011/2012

Dédicaces

Je dédie ce mémoire à mes chers parents :

- *Mon père* ALI HAMAN,

- *Et ma mère* DJEBBA BOUKAR

Remerciements

Je tiens à remercier tout d'abord ALLAH le tout puissant de m'avoir donné la force et la volonté d'accomplir ce travail.

Je tiens avant tout à exprimer ma profonde reconnaissance au Pr. BEDA TIBI, vice-recteur chargé de l'enseignement à l'université de Ngaoundéré, qui a assuré la direction de ce mémoire, malgré ses nombreuses responsabilités. Je voudrais lui témoigner ma profonde gratitude pour sa disponibilité, sa patience, son écoute, sa rigueur scientifique et ses conseils judicieux qui m'ont permis de mener à bien ce travail de recherche.

Je remercie l'ensemble des membres du jury d'avoir accepté de consacrer un peu de leur temps à examiner ce travail : Pr. KUITCHE Alexis son président, Dr. NTAMACK Guy Edgar l'examinateur, Pr. BEDA TIBI son rapporteur.

Mes remerciement vont également à tous les enseignants de la faculté des sciences en général et à ceux du département de physique en particulier.

Je remercie monsieur OUMAROU SANDA pour sa disponibilité, son aide et ses conseils. Pour moi, ce fut un grand plaisir d'avoir travaillé ensemble.

Je remercie infiniment mon père ALI HAMAN et ma mère DJEBBA BOUKAR pour leurs soutiens indéfectibles, mes oncles ADJI HAMAN et SAIBOU BOUBA pour leurs encouragements et leurs soutiens, mes frères BACHIROU et SADAT, mes sœurs ASSIA, SAOUDA, FAOUZIA, SAMIRA et SOUREIYA, toute ma famille je vous suis très reconnaissant pour tous ce que vous avez fais pour moi, merci encore une fois de plus.

Je remercie tous mes camarades de promotion, mes amis, pour les échanges et les conversations, qui ont rendu ces années très agréables.

Merci à tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce mémoire de master recherche.

TABLE DES MATIERES

Dédicaces i

Remerciements ii

Table des matières iii

Liste des figures vii

Liste des tableaux viii

Résumé 1

Abstract 2

INTRODUCTION GÉNÉRALE 3

CHAPITRE I : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE. 5

Introduction 5

I-Généralités sur les élastomères. 5

I-1-Propriétes mécaniques. 5

I-1-1-Propriétés élastiques. 5

I-1-2-Propriétés dissipatives 6

I-1-3-Dependance en température. 6

I-1-4-Dependance en fréquence. 7

I-1-5-Dependance en amplitude 7

I-2- Historique des études de vibrations des tiges élastiques 8

I-2-1- Vibrations longitudinales 8

I-2-2-Vibrations de torsion. 8

I-2-3-Vibrations de flexion 9

I-2-4-Vibrations couplées. 9

I-3-Vibrations viscoélastiques des tiges. 10

I-4-Les essais dynamiques 10

I-5-Les appareils d'essais dynamiques 11
I-6-Lois de comportement viscoélastique 12
CHAPITRE II : VISCOELASTICITE LINEAIRE UNIDIMENSIONNEL 13
Introduction 13
II-1- Expériences uniaxiales 13
II-1-1-Fluage. 13
II-1-2-Relaxation 15
II-1-3-Recouvrance de la déformation et effacement des contraintes 16
II-1-3-1-Recouvrance de la déformation. 16
II-1-3-2- Effacement des contraintes. 18
II-2-Autres expériences 19
II-3-Expériences cruciales. 19
II-4-Principe de superposition de Boltzmann. 20
II-4-1-Formulation Boltzmannienne 21
II-4-2-Opérateur d'intégral appliquée aux formules de Boltzmann 24
II-5-Comportement linéaire non vieillissant 25
Conclusion 27
CHAPITRE III : COMPORTEMENT LINEAIRE TRIDIMENSIONNEL.... 28
Introduction 28
III-1-Formulation différentielle 28
III-2-Formulation par une fonctionnelle 29
III-3-Formulation par des dérivées fractionnaires 30
III-4- Les transformées intégrales. 31
III-4-1- Méthode de Fourier. 31
III-4-1-1-Pour une formulation différentielle 32
III-4-1-2-Pour un problème défini par une fonctionnelle. 32
III-4-1-3- Pour un problème défini par des dérivées fractionnaires 33

III-4-2- Méthode de Laplace-Carson 35
III-4-2-1-Pour une formulation différentielle 35
III-4-2-2- Pour une formulation par une fonctionnelle 36
III-4-2-3-Pour une formulation par des dérivées fractionnaires 36
III-5- Principe de correspondance élastique-viscoélastique 37
III-6- Notion d'amortissement 38
III-6-1-Loi de comportement pour une sollicitation harmonique 38
III-6-2-Déphasage et amortissement 40
Conclusion 40
CHAPITRE IV: CHOIX ET VALIDATION DU MODELE VISCOELASTIQUE 41
Introduction 41
IV-1-Appareillage et acquisition des données 41
IV-1-1-Appareillage 41
IV-1-2-Acquisitions des données 43
IV-2-Modèles viscoélastiques. 44
IV-2-1-Modèles rhéologiques de base. 44
IV-2-2-Modèles analogiques 45
IV-2-2-1-Modèle de Kelvin-Voigt. 45
IV-2-2-2-Modèle de Maxwell 47
IV-2-2-3-Modèle de Zener 49
IV-2-3-Modèles analogiques généralisés 51
IV-2-3-1-Modèle de Maxwell généralisé 51
IV-2-3-1-Modèle de Kelvin-Voigt généralisé 52
IV-3-Modèles mathématiques. 53
IV-3-1-Modèle ADF ou à champ de déplacement augmenté 53
IV-3-2-Modèle de Golla-Hughes-Mac Tavish 54
IV-3-3-Modèles fractionnaires 55

IV-4-Procedures d'identifications des paramètres. 56

IV-4-1-La méthode graphique d'évaluation des paramètres α, ω_0, ω_1 et E_0.....56

IV-4-2-Méthode numérique d'évaluation des paramètres 58

IV-5-Résultats.....59

IV-6-Comparaison des modèles ADF et fractionnaire avec nos résultats expérimentaux 60

IV-7-Analyse des résultats 62

Conclusion 62

CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES 63

BIBLIOGRAPHIE.....64

Liste des figures

Figure 1: appareil de traction à vitesse de déformation vraie imposée [19]. 11
Figure 1a: Echelon de contrainte 14
Figure 1b: Réponse en déformation.....14
Figure 2: Expérience de relaxation 15
Figure 3: Expérience de recouvrance. 17
Figure 4: Expérience d'effacement.....18
Figure 5: Le principe de superposition de Boltzmann.....20
Figure 6: Réponses viscoélastiques non vieillissants obtenues par décalage du temps de mise sous sollicitation 25
Figure 7: Schéma du principe de correspondance 38
Figure 8: Circuit d'acquisition des données expérimentales pour l'évaluation de module complexe d'Young des élastomères [34].....42
Figure 9: Courbe expérimentale du module complexe du Paracril BJ0 PHR Carbone 43
Figure 10: Courbe expérimentale du coefficient d'amortissent η du Paracril BJ0 PHR Carbone.....44
Figure 11: Représentation rhéologique d'un solide élastique et d'un liquide newtonien 45
Figure 12: la réponse de fluage de Kelvin-Voigt.....46
Figure 13: Réponses en fluage et en relaxation du modèle de Maxwell 48
Figure 14: Technique d'évaluation des paramètres E_0 ,ω_0,ω_1 et α.....57
Figure 15: Courbes de module complexe du modèle ADF et expérimentale 60
Figure 16: Courbes d'amortissement du modèle ADF et expérimentale 60
Figure 17: Courbes de module complexe du modèle fractionnaire et expérimentale 61
Figure 18: Courbes d'amortissement du modèle fractionnaire et expérimentale 61

Liste des tableaux

Tableau 1 : illustration des lois de comportement et paramètres correspondants des matériaux viscoélastiques [8]. 34

Tableau 2 : Comparaison des paramètres rhéologiques du Paracril carbone 62

RESUME

Les progrès dans le domaine de la science des matériaux ont conduit à une utilisation de plus en plus importante et diversifiée des matériaux viscoélastiques tels que les élastomères, communément appelés caoutchoucs. Ces derniers représentent souvent une alternative aux matériaux métalliques, ce en raison de leur faible masse, de coûts de production réduits, de facilité de mise en forme, mais aussi de dissipation d'énergie mécanique. Pour cela, ils sont très employés dans de nombreux secteurs industriels.

L'objectif de ce travail est de valider le modèle rhéologique, tel que le modèle analogique classique avec la théorie de viscoélasticité pour prévoir les réponses de fluage et de relaxation des matériaux. En conséquence, il est nécessaire de développer un modèle analytique qui peut prévoir exactement le comportement des structures de ces matériaux sous l'effet de fluage et de relaxation.

La loi de comportement viscoélastique a été déterminée en se basant sur le principe de superposition de Boltzmann, les équations caractéristiques ont été résolues par les transformées intégrales. Ainsi les coefficients de la complaisance de fluage et le module de relaxation sont calculés pour les différents modèles proposés, les bons résultats ont été obtenus avec le modèle fractionnaire.

Mots-clés : fluage, relaxation, matériaux à mémoire, viscoélasticité.

ABSTRACT

Progress in the field of the science of materials led to increasingly significant and diversified use viscoelastic materials such as elastomers, commonly called rubbers. The latter often represent an alternative to metallic materials, it because of their low mass, reduced facility production costs of working, but also of mechanical dissipation of energy. For that, they are very employed in many industrial sectors.

The objective of this work is to validate the rheological model, such as the traditional analog model with the theory of viscoelasticity to envisage the answers of creep and relieving of materials. Consequently, it is necessary to develop an analytical model which can envisage exactly the behavior of the structures of these materials under the effect of creep and relieving.

The viscoelastic law of behavior was given while being based on the principle of superposition of Boltzmann; the characteristic equations were solved by the integral transforms. Thus the coefficients of kindness creep and the module of relieving are calculated for the various models suggested; the good results were obtained with the fractional model.

Key words: creep, relieving, materials with memory, viscoelasticity.

INTRODUCTION GENERALE

Les élastomères font partie de la grande famille des polymères, et désignent aujourd'hui d'une façon générale tous les caoutchoucs, naturels ou synthétiques. A cause de leur caractère dissipatif de l'énergie mécanique vibratoire, l'utilisation de ces matériaux est de plus en plus fréquente dans les secteurs industriels, tels que l'industrie aéronautique, l'industrie automobile, le chemin de fer, les blocs silencieux…etc.

Le comportement mécanique complexe des élastomères, dépend du pré charge, de la fréquence, de la température et de l'amplitude d'excitation. Ce comportement est étudié en régime quasi-statique et en régime dynamique pour une utilisation plus rationnelle de ces derniers.

En quasi statique, ces matériaux peuvent subir des grandes déformations et revenir en suite à peu près à la forme initiale, sans déformation permanente.

En dynamique, ceux-ci présentent une rigidification en fréquence sous excitation harmonique, et exhibent un comportement viscoélastique présentant les propriétés d'un solide élastique idéal dit hookéen, mais aussi celles d'un fluide visqueux dit newtonien.

En outre, ces essais expérimentaux sont coûteux et difficiles à effectuer en temps réel. Par conséquent, un besoin existe pour développer un modèle analytique qui peut prévoir exactement le comportement en fluage et en relaxation des élastomères, et qui peut également vérifier ce modèle avec des données expérimentales.

Le travail que nous allons présenter concerne la modélisation du phénomène de fluage et de relaxation des matériaux viscoélastiques et se compose de quatre chapitres :

Le premier chapitre est consacré à l'étude bibliographique, aux essais dynamiques des tiges élastiques et viscoélastiques.

Dans le deuxième chapitre, nous allons effectuer une étude expérimentale sur le comportement viscoélastique linéaire unidimensionnel en fluage et en relaxation ainsi que leurs fonctions réponses correspondantes.

Le troisième chapitre présente les lois de comportement linéaire isotrope tridimensionnelles des matériaux viscoélastiques.

Le dernier chapitre concerne le choix et la validation du modèle viscoélastique en effectuant une étude comparative entre un modèle expérimental et les différents modèles rhéologiques de fluage et de relaxation, afin d'adopter celui qui décrit le mieux le comportement des matériaux viscoélastiques. Puis on terminera la présentation de ce travail par une conclusion générale et des perspectives.

CHAPITRE I : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

Introduction :

Dans ce chapitre, une synthèse bibliographique est menée sur le comportement mécanique des matériaux viscoélastiques. Une première partie est consacrée à une étude générale des propriétés physiques des élastomères. Afin de mieux comprendre les mécanismes, nous proposons d'en donner les principaux résultats obtenus par divers chercheurs. Les études des vibrations des tiges élastiques, les essais dynamiques et les appareils d'essais dynamiques font l'objet d'une deuxième partie de ce premier chapitre. Nous mettrons l'accent sur le comportement viscoélastique linéaire de ces matériaux.

I-Généralités sur les élastomères

Le caoutchouc fait partie des substances appelées polymères dont la principale caractéristique est la grande longueur des chaines moléculaires qui les constituent. De ce fait, il possède une bonne élasticité dans une large gamme de température (de -50° à 150°C environ), c'est pourquoi on le désigne assez souvent élastomère. Contrairement aux thermoplastiques semi-cristallins, les élastomères ne présentent pas le point de fusion. Leur zone de transition vitreuse se situe autour de -70°C. Au dessus de cette température, ils sont dans un état dit caoutchoutique.

Les élastomères sont les seuls matériaux industriels qui retournent pratiquement à leurs dimensions initiales après avoir subi des déformations importantes. Ceci les rend irremplaçables pour résoudre de façon simple et peu onéreuse les problèmes de liaisons élastiques ou souples, d'amortissement et d'étanchéité [1].

I-1-Propriétes mécaniques

I-1-1-Propriétés élastiques

L'élastomère est constitué des longues chaines moléculaires comportant des points de jonction. Ces macromolécules forment ainsi un réseau tridimensionnel dont les segments de chaines sont orientés de façon aléatoire. Outre ces points de jonction de type liaisons covalentes, il existe des liaisons à très faible énergie appelées liaisons secondaires ou

enchevêtrements. L'élasticité caoutchoutique est le résultat de cette faible interaction entre les macromolécules. Ainsi, sous l'action d'une sollicitation mécanique, ces chaines moléculaires peuvent glisser les unes sur les autres et changer ainsi la configuration microstructurale du réseau moléculaire qui passe d'un arrangement aléatoire à un arrangement orienté suivant la direction de sollicitation. L'élasticité caoutchoutique est donc de nature entropique [2].

I-1-2-Propriétés dissipatives

L'énergie dissipée au cours d'un cycle d'hystérésis sous forme de chaleur traduit les propriétés d'amortissement du matériau. Dans le cas d'oscillations libres, cet aspect se traduit par une diminution de l'amplitude des vibrations au cours du temps. Pour caractériser l'amortissement d'une structure, on définit les notions fondamentales d'angle de perte et le module complexe [3]. La connaissance du facteur de perte revêt un intérêt pratique considérable [4] ; contrairement à la rigidité, le facteur d'amortissement est indépendant de la forme de l'échantillon, à la différence du module d'élasticité, il ne peut en général être déduit de simples mesures statiques [5].

I-1-3-Dependance en température

Un polymère linéaire amorphe non orienté a un comportement viscoélastique prononcé. Il peut se situer dans quatre zones distinctes du comportement mécanique dynamique :

-une zone vitreuse ou cristalline où il présente à basse température, comme tous les polymères, les propriétés d'un verre. Les mouvements des chaines macromoléculaires sont très réduits. Le module d'Young prend sa valeur maximale sur le plateau vitreux environ 3GPa à une fréquence de 1Hz, et diminue lentement avec la température. Le polymère est rigide et généralement cassant [6]. Dans cette zone il présente un caractère élastique dominant et une très faible valeur du facteur de perte.

-une zone de transition vitreuse ou zone viscoélastique dans laquelle si la température augmente, les déformations locales de chaines macromoléculaires situées dans les domaines amorphes apparaissent, les chaines principales ayant acquis un degré de liberté supplémentaire.

-une zone caoutchouteuse qui est caractérisée par une augmentation de la mobilité moléculaire, le module d'élasticité est faible sur le plateau caoutchouteux environ 1MPa à une fréquence de 1Hz. La présence de ce plateau est due à la formation d'enchevêtrements qui sont des points de réticulation occasionnels entre les chaines de la pelote polymère qui tiennent lieu de pontages. Le polymère souple présente la haute élasticité caoutchouteuse, d'origine entropique. Dans cette zone le facteur de perte est compris entre 0.1 et 0.3 [7].

-une zone fluide ou d'écoulement caoutchouteux correspondant à un passage de l'état solide à l'état fluide lorsque la température augmente. Cette région instable voit le module chuter et le facteur de perte augmenter à nouveau. Cette quatrième zone n'existe pas pour les polymères réticulés.

Dans les conditions d'utilisation industrielle, les élastomères sont généralement employés à la fin de la zone de transition, ou au début de la zone caoutchoutique [3].

I-1-4-Dependance en fréquence

A basse fréquence, le module dynamique et le coefficient d'amortissement sont faibles. A fréquence nulle, le module dynamique tend vers une valeur limite qui représente la raideur statique : si le comportement du matériau est celui d'un fluide, cette valeur est nulle. A haute fréquence, le module de rigidité devient important et tend vers une valeur asymptotique. Entre ces deux zones il existe une fréquence de transition pour laquelle le coefficient d'amortissement est maximal, et près de laquelle le coefficient d'amortissement et le module de rigidité varient fortement [3].

I-1-5-Dependance en amplitude

Les élastomères sont constitués de longues chaines macromoléculaires repliées sur elles-mêmes flexibles. La variation du module dynamique en fonction de l'amplitude est due au frottement des chaines macromoléculaires avec les particules de chargement. De nombreux auteurs ont observé expérimentalement et commenté ce phénomène. Les premières explications ont été fournies par Payne en 1965. Parmi les plus récents, citons entre autres : Austrell P. E., (1997), Coveney V.A. & al., (1999) et Lion A., (1998). Ceux-ci observent expérimentalement que la diminution de raideur aux faibles amplitudes est

d'autant plus importante que le matériau est chargé en noir de carbone. De même, les propriétés amortissantes sont plus importantes dans le cas où l'élastomère est chargé.

I-2- Historique des études de vibrations des tiges élastiques

Les vibrations des tiges ont donné lieu à lieu à des études quantitatives au début du 18^{e} siècle lorsqu'on commençait à maitriser, en mathématique les équations aux dérivées partielles. On peut citer les premiers travaux en élasticité : HOOKE (1635-1703) ; YOUNG (1773-1829) ; HENRI NAVIER (1785-1836) ; CAUCHY (1789-1857) ; LAME (1795-1857) ; SAINT-VENANT (1797-1886) ; KIRCHHOFF (1824-1907)… [8]. Nous allons présenter ici un certain nombre des travaux effectués sur les différentes vibrations des tiges élastiques.

I-2-1- Vibrations longitudinales

En vibration longitudinale, D'ALEMBERT, HAMILTON [9] ont utilisé la loi fondamentale de la dynamique, la méthode vibrationnelle et ont trouvé le résultat suivant :

$$E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (1.1)$$

Cette équation a été corrigée bien après par LOVE [10] en ajoutant le terme d'inertie transversale, d'où la nouvelle équation corrigée :

$$E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho v^2 r^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2} - \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad (1.2)$$

Plusieurs améliorations de cette équation ce sont développées au fil du temps, BISHOP [11] a suggéré de tenir en compte à la fois l'inertie transversale et du cisaillement dans la section. L'équation s'écrit de la forme :

$$E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho v^2 r^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2} - Gv^2 r^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad (1.3)$$

I-2-2-Vibrations de torsion

Le gauchissement de la section non circulaire est pris en compte dans la théorie élémentaire grâce à SAINT-VENANT [12], l'équation s'écrit :

$$C^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \qquad \text{Avec} \qquad C^2 = \frac{C_T}{\rho I_P} = \frac{kG}{J}$$

Celle-ci a été amélioré tour à tour par LOVE, GUERE, et BARR [13] en introduisant les coefficients de pondération tenant en compte la dispersion des ondes. Elle s'écrit sous la forme :

$$\chi^2 \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} - (\frac{\rho}{G} + \frac{\rho \chi^2}{E}) \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{k(1-k)G}{\mu^2 E} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{(1-k)\rho}{\mu^2 E} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \frac{\rho^2}{EG} \frac{\partial^4 \theta}{\partial t^4} = 0 \qquad (1.4)$$

I-2-3-Vibration de flexion

D'après les théorèmes généraux de la dynamique, BERNOUILLI-EULER [14] ont posé comme hypothèse, la section de la poutre constante, explicité par l'équation suivante :

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T_{ext} = 0 \qquad (1.5)$$

Une correction à cette équation fut apportée par TIMOSHENKO [15], qui tient en compte l'inertie rotationnelle et de la force de cisaillement. Elle étudie deux modes élastodynamiques. La théorie de MINDLIN se rapproche de celle de TIMOSHENKO avec une différence de l'interprétation du cisaillement transversal, l'équation s'écrit :

$$\rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\rho^2 I}{kGS} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} - \rho I (1 + \frac{E}{kG}) \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \qquad (1.6)$$

I-2-4-Vibrations couplées

Lorsque l'axe de l'éprouvette n'est pas confondu avec l'axe de symétrie de celle-ci, on parle donc de la vibration couplée. L'étude théorique débouchant sur les applications de caractéristiques des termes non diagonaux de la matrice de souplesse du matériau viscoélastique a été proposée par LE NIZERHY, CHEVALIER, VINH [16].

Un grand nombre des travaux intéressant sur le plan théorique n'ont pas été énuméré à cause de leur maniement trop lourd en calculs numériques. Sur le plan expérimental, cela exige un grand nombre de paramètres difficile à évaluer.

I-3-Vibrations viscoélastiques des tiges

L'étude des vibrations transitoires repose sur le principe de correspondance. Ce principe stipule que si une solution élastique de la vibration d'une tige de même géométrie est connue explicitement, avec les conditions aux limites ne variant pas avec le temps, on applique les formules de correspondances aux transformées pour obtenir la transformée de Carson qui nous permet d'en déduire la solution viscoélastique du problème. Cette approche a l'avantage d'une économie de solution analytique directe en viscoélasticité.

Expérimentalement, nous relevons un grand nombre des travaux effectués par : VINH qui a présenté une variété d'appareil de mesure en vibration entretenues (transitoire). READ et DEAN ont présenté dans leur ouvrage, des méthodes de mesures dynamiques en viscoélastique linéaire. Sur le plan théorique, il n'en existe pas d'étude particulière mis à part les travaux de MENDEL et E.H.LEE [17].

I-4-Les essais dynamiques

Les essais se subdivisent en trois étapes successives [18] :

-la phase de conception de la machine est la première étape. Il est à noter ici que certains appareils ont une solide réputation économique, ils présentent toute fois des faiblesses dans la conception consécutive : ceci à cause des méconnaissances des notions élémentaires en élastodynamique et l'ignorance des bases rhéologiques [8].

-la deuxième étape est la conduite des essais. Ici les progrès récents en instrumentation et en traitement du signal doivent êtres pris en compte après une campagne de mesure.

-la dernière étape constitue l'interprétation des résultats des mesures. Elle se base sur la loi de comportement adoptée au départ et souvent à l'identification des paramètres rhéologiques cherchés.

I-5-Les appareils d'essais dynamiques

On présente dans cette partie trois grandes classes groupées d'appareil d'essais dynamiques.

Les essais transitoires : qui concernent les essais de fluage et de relaxation lorsqu'ils sont lents, par contre incluent les essais au choc localisé lorsqu'ils sont rapides. On peut aussi ajouter les essais par propagation d'onde.

Les essais harmoniques : nous avons ici les essais de traction-compression, les essais de torsion, de flexion et les essais combinés aboutissant à des ondes couplées dans l'échantillon.

La dernière classe concerne les essais de propagation qu'on peut grouper avec les essais transitoires présentés ci-haut. Mais la différence entre ceux-ci est l'utilisation des techniques ultrasonores dans cette classe et les ondes sont progressives, peuvent être transitoires dans les milieux continus bornés.

La figure ci-dessous présente un dispositif moderne permettant de mesurer en temps réel avec une meilleure précision les essais de traction en quasi-statique.

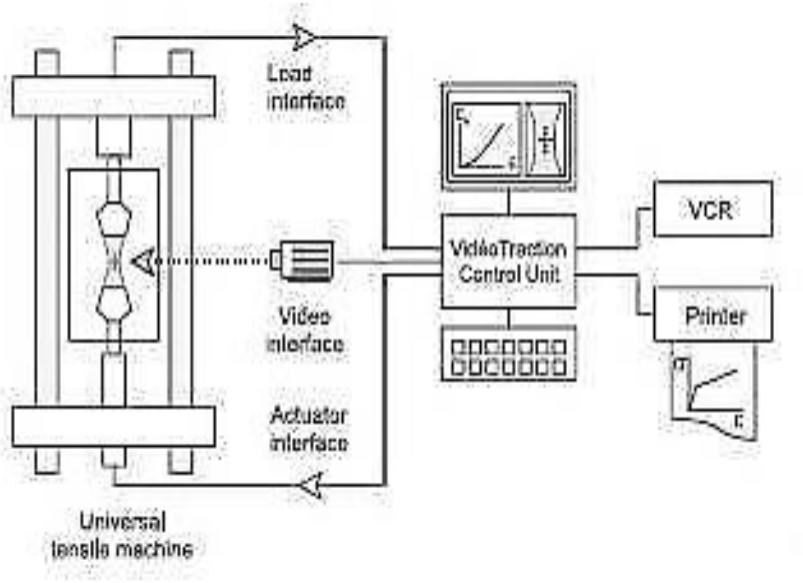


Figure 1 : appareil de traction à vitesse de déformation vraie imposée [19].

I-6-Lois de comportement viscoélastique

Pour déterminer les lois de comportement viscoélastique, il faut s'appuyer sur les considérations thermodynamiques du matériau comme le cas de SIDOROFF, et sur des considérations microstructurales celui de FERRY.

Certains utilisent les calculs numériques, d'autres utilisent les approches récentes de BAGLEY et TORVIK sur les dérivées fractionnaires dans la loi de comportement afin d'optimiser le nombre des paramètres rhéologiques [17]. La notion d'essais mécaniques à pilotage vidéométrique donne une loi de comportement élastique, et en appliquant le théorème de correspondance, on déduit donc la solution viscoélastique.

CHAPITRE II : VISCOELASTICITE LINEAIRE UNIDIMENSIONNEL

Introduction :

Ce chapitre a pour objet de présenter succinctement les différentes expériences de base en viscoélasticité linéaire, plus particulièrement dans le cas de comportement unidimensionnel. Ces expériences ont pour but de nous permettre à pouvoir réaliser les différentes modélisations viscoélastiques qui seront développées plus tard et qui vont nous permettre d'aborder le problème d'identification des paramètres rhéologiques des élastomères. Nous allons nous placer ici dans l'hypothèse des petites perturbations et dans le cadre isotherme.

II-1- Expériences uniaxiales

II-1-1-Fluage

L'expérience isotherme de fluage appelée encore expérience de retard, sous sollicitation uniaxiale, permet de mettre en évidence et d'identifier le comportement différé des matériaux viscoélastiques. Pour réaliser cette expérience, on impose à un corps de forme convenable (éprouvette de traction, éprouvette de compression,…) une sollicitation uniaxiale en contrainte, réputée homogène. Dans le cas de l'expérience de fluage en traction simple d'une éprouvette de polymère en restant dans le cadre des petites déformations, et en maintenant la température constante.

- L'éprouvette n'est initialement pas chargée ; elle est en équilibre et son matériau constitutif est alors dans son état naturel (état de contrainte nul en tout point).
- A l'instant t_0 on impose « instantanément » un échelon de contrainte d'amplitude σ_0.
- Cette contrainte est ensuite maintenue constante (figure 1a).

On observe la réponse uniaxiale correspondante, c'est-à-dire l'évolution dans le temps, ou l'histoire de la déformation longitudinale ε supposée homogène dans l'éprouvette, comptée à partir de l'état naturel pris comme référence géométrique (figure 1b).

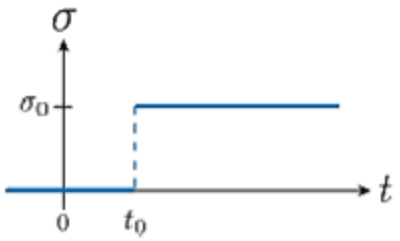


Figure 1a : Echelon de contrainte

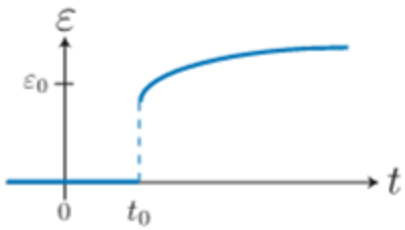


Figure 1b : Réponse en déformation

Figure1 : Essai uniaxial de fluage

Dans ce cas, nous pouvons écrire l'histoire de la sollicitation sous la forme :

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t - t_0) = \sigma_0 H_{t_0} \qquad (2.1)$$

Où H_{t_0} = { 0 si t< t_0 ; 1 si t> t_0 } est la fonction de Heaviside. (2.2)

La réponse viscoélastique, en termes de déformation, se met sous la forme :

$$\varepsilon(t) = J(t_0, t)\sigma_0 = J_{t_0}\sigma_0 \qquad (2.3)$$

Où $J(t_0, t)$ est appelée la fonction de retard ou complaisance de fluage. Elle correspond à la réponse dans le cas d'une sollicitation unitaire et possède les propriétés suivantes [14] :

$$\begin{cases} J(t_0, t) = 0 \text{ si } t \prec t_0 \\ J(t_0, t_0) = J(t_0, t_0^+) \\ J(t_0, t) \text{ Croissante en fonction de } t \text{ pour} \end{cases} \qquad (2.4)$$

La fonction $J(t_0,t)$ présente, le plus souvent, une discontinuité pour $t=t_0$, correspondant à la réponse instantanée du matériau qu'on a notée $J(t_0,t_0^+)$. Par ailleurs, le fait qu'elle ne dépend pas de la contrainte nous place dans le cadre de la viscoélasticité linéaire. Ainsi, à tout instant *t* la déformation *ε(t)* est proportionnelle à la contrainte appliquée σ_0. En d'autre terme, la cinétique de fluage n'est pas influencée par l'amplitude de la contrainte. Bien entendu, ces considérations ne restent valables que pour le fluage primaire et secondaire.

II-1-2-Relaxation

Dans l'essai de relaxation, on impose instantanément une déformation d'amplitude ε_0 à l'instant t_0 qu'on maintient constante par la suite (Figure 2a). On observe la réponse en termes de contrainte $\sigma(t)$ qui varie de façon monotone décroissante en fonction du temps (Figure 2b).

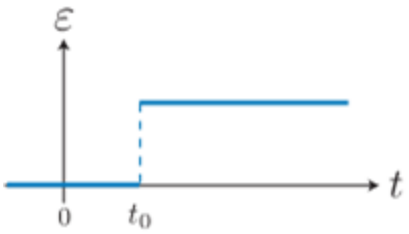


Figure 2a : Echelon de déformation

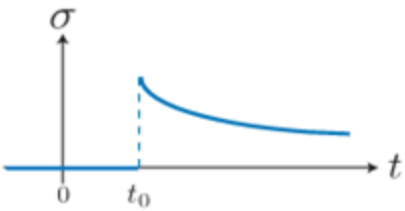


Figure 2b : Réponse en contrainte

Figure 2 : Expérience de relaxation

Dans cette expérience de relaxation, qui est l'homologue de la précédente, on peut écrire l'histoire de la sollicitation sous la forme :

$$\varepsilon(t)=\varepsilon_0 H(t-t_0)=\varepsilon_0 H_{t_0} \qquad (2.5)$$

La réponse correspondante, en termes de contrainte, est alors :

$$\sigma(t)=R(t_0,t)\varepsilon_0=R_{t_0}\varepsilon_0 \qquad (2.6)$$

Où $R(t_0,t)$ est appelée la fonction de relaxation. De façon similaire au cas du fluage, elle correspond à la réponse dans le cas d'une sollicitation unitaire et possède les propriétés suivantes [20] :

$$\begin{cases} R(t_0,t)=0 \text{ si } t \prec t_0 \\ R(t_0,t_0)=R(t_0,t_0^+) \\ R(t_0,t) \text{ décroissante en fonction de } t \text{ pour } t \succ t_0 \end{cases} \quad (2.7)$$

REMARQUE :

Malgré leur similitude apparente, il existe une différence importante entre les expériences de retard et de relaxation quant à la possibilité effective de les réaliser :

- ✓ L'expérience de retard ou de fluage est toujours réalisable, quel que soit le matériau.
- ✓ En revanche, l'expérience de relaxation n'est réalisable que s'il est possible d'appliquer au matériau un échelon de déformation instantanée, c'est-à-dire si la réponse instantanée du matériau dans l'expérience de retard est non nulle : $J(t_0,t_0^+)\neq 0, \forall\ \sigma_0 \neq 0$.

Par ailleurs, l'expérience montre que les temps caractéristiques des phénomènes de fluage et de relaxation sont en général, significativement différent : la relaxation est un phénomène plus rapide que le fluage.

II-1-3-Recouvrance de la déformation et effacement des contraintes

II-1-3-1-Recouvrance de la déformation

Dans cette expérience, on applique un créneau de contrainte d'amplitude σ_0 à partir de l'instant t_0, puis on l'interrompt par une décharge instantanée de même amplitude à l'instant t_1. Les déformations évoluent dans le temps (figure 3).

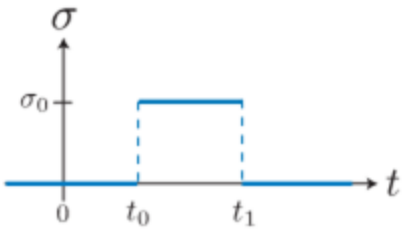


Figure 3a : créneau de contrainte

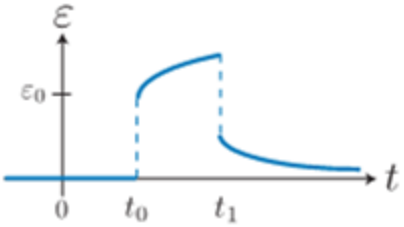


Figure 3b : réponse en déformation

Figure 3 : Expérience de recouvrance

L'histoire de la sollicitation s'écrit, avec $t_0 < t_1$

$$\sigma(t) = \sigma_0 \left[H(t-t_0) - H(t-t_1) \right] = \sigma_0 (H_{t_0} - H_{t_1}) \quad (2.8)$$

Où *H(t)* est la fonction de Heaviside.

En observant la réponse en déformation représentée sur la figure 3b, on a :

- Pour $t < t_1$, on retrouve l'essai de fluage.
- Pour $t = t_1$, on relâche la contrainte. Il y a alors un retour instantané d'amplitude égale au saut observé en $t = t_0$.
- Pour $t > t_1$, les déformations décroissent et reviennent à l'état initial [21].

Le phénomène mis en évidence dans cette expérience porte le nom de *recouvrance*. Cette recouvrance est dite totale si la déformation ε s'annule pour t suffisamment grand ou lorsque t tend vers l'infini, il n'y a alors pas de déformation permanente du matériau après décharge totale.

II-1-3-2- Effacement des contraintes

L'expérience d'effacement est l'homologue de la précédente, dans laquelle la sollicitation imposée est un créneau de déformation d'amplitude ε_0 à l'instant t_0, puis on l'annule instantanément à l'instant t_1. (Figure 4)

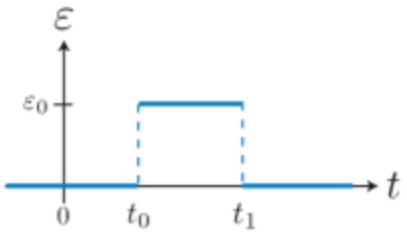


Figure 4a : créneau de déformation

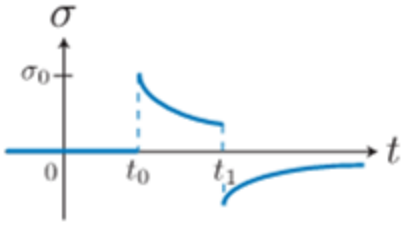


Figure 4b : réponse en contrainte

Figure 4 : Expérience d'effacement

L'histoire de la sollicitation s'écrit, ainsi avec $t_0 < t_1$:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \left[H(t-t_0) - H(t-t_1) \right] \quad (2.9)$$

$$= \varepsilon_0 (H_{t_0} - H_{t_1})$$

La réponse typique en contrainte est représentée sur la figure 4b :

- Pour $t < t_1$, elle est identique à celle de l'expérience de relaxation.
- Pour $t = t_1$, lorsque l'on ramène la déformation à la valeur nulle, on observe une réponse instantanée décroissante.
- Pour $t \succ t_1$, il y a une évolution de la contrainte monotone décroissante en valeur absolue.

Le phénomène mis en évidence porte le nom d'*effacement de la contrainte*. Si l'amplitude σ s'annule pour un temps t suffisamment grand, ou lorsque t tend vers l'infini, l'effacement est total.

II-2-Autres expériences

Les expériences décrites ci-dessus permettent d'appréhender le comportement différé d'un matériau mais ne suffisent pas pour le déterminer. Chaque histoire de sollicitation (en contrainte, en déformation, ou mixte) est un cas nouveau dont, en règle générale, la description ne peut être obtenue à partir des expériences précédentes [14].

On traitera dans la suite du cas du comportement linéaire pour lequel l'intérêt porté ci-dessus aux expériences fondamentales se révèlera pleinement justifié puisqu'il est alors possible d'écrire la réponse à toute histoire de sollicitation isotherme à partir du seul « catalogue » des expériences de retard isothermes ou celui des expériences de relaxation isothermes.

II-3-Expériences cruciales

La distinction entre viscoélasticité et la viscoplasticité se révèle plus délicate dans le cas général si l'on s'en tient à l'approche phénoménologique sans prise en considération des phénomènes physiques mis en jeu dans le comportement différé. La simple transposition au niveau du comportement différé de l'expérience de recouvrance comme expérience cruciale n'est pas pertinente parce que l'idée intuitive serait en effet alors de caractériser la viscoélasticité par la propriété de recouvrance totale, ce qui est immédiatement contredit par la considération pour un élément visqueux linéaire, la recouvrance partielle et qu'il n'y a pas l'expérience d'effacement. MANDEL a proposé, d'adopter l'expérience d'effacement comme expérience cruciale et de caractériser la viscoélasticité par la propriété d'effacement total (cette caractérisation exclut les cas des matériaux indéformable instantanément). Il semble que cette définition permette de couvrir l'ensemble des modèles réalistes [14].

II-4-Principe de superposition de Boltzmann

Le principe de Boltzmann est basé sur l'idée que la superposition des sollicitations implique la superposition homologue des réponses (figure 5).

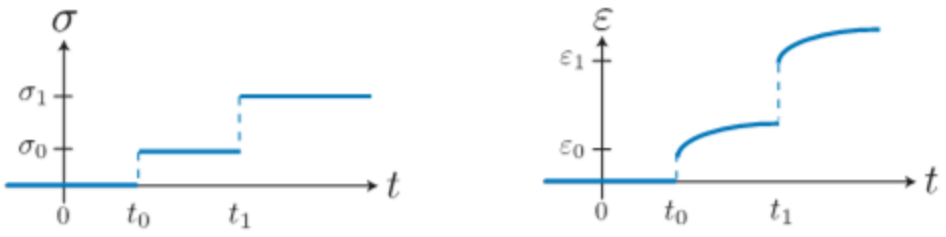


Figure 5 : Le principe de superposition de Boltzmann

Dans une considération plus mathématique, le principe de superposition énonce la linéarité du comportement du matériau considéré. La correspondance fonctionnelle entre l'histoire de sollicitation en contrainte σ et l'histoire de sollicitation en déformation ε est traduite par la loi de comportement isotherme du matériau, dans le cadre uniaxial.

A chaque instant t, la déformation $\varepsilon(t)$ dépend de l'histoire de la contrainte σ jusqu'à cet instant. On exprimera cette correspondance univoque par l'équation (2.10) dans laquelle $\left[\sigma^{t}_{-\infty}(\tau)\right]$ représente symboliquement l'histoire de σ et où les bornes inférieur $(-\infty)$ et supérieur (t) pour la variable (τ) traduisent le principe de causalité qui stipule que : l'histoire de σ postérieure à l'instant actuel t ne peut influer sur la valeur de $\varepsilon(t)$.

$$\varepsilon(t) = \mathscr{F}\left[\sigma^{t}_{-\infty}(\tau)\right] \qquad (2.10)$$

Si la correspondance inverse de (2.10) est définie, elle s'écrit de la même façon :

$$\sigma(t) = \mathscr{G}\left[\varepsilon^{t}_{-\infty}(\tau)\right] \quad (2.11)$$

Sans entrer dans les détails mathématiques, l'équation (2.10) définit à partir de l'ensemble des histoires de σ un ensemble d'histoires de ε. On désigne par $\mathscr{F}$ la correspondance fonctionnelle univoque qui associe à chaque histoire de σ l'histoire de ε :

$$\sigma \xrightarrow{\mathscr{F}} \varepsilon \qquad (2.12a)$$

Réciproquement, sur l'ensemble des histoires de ε engendré par (2.12a), si (2.11) existe, on désigne par $\mathcal{G}$ la correspondance fonctionnelle inverse, qui associe à chacune de ces histoires l'histoire de σ définie par (2.11) :

$$\varepsilon \xrightarrow{\mathcal{G}} \sigma \qquad (2.12b)$$

La linéarité de la fonctionnelle $\mathcal{F}$ explicite mathématiquement le principe de superposition. Considérons deux histoires σ_1 et σ_2 de σ et les deux histoires ε_1 et ε_2 qui leur sont associées par (2.10) et (2.11), alors il existe des réels $\lambda_1$et λ_2 tels que l'histoire de ε qui est associée à l'histoire de $\sigma = \lambda_1\sigma_1 + \lambda_2\sigma_2$, combinaison linéaire quelconque de σ_1 et σ_2, est la combinaison linéaire homologue $\varepsilon = \lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2$. Ainsi on a :

$$\mathcal{F}(\lambda_1\sigma_1 + \lambda_2\sigma_2) = \lambda_1\,\mathcal{F}(\sigma_1) + \lambda_2\,\mathcal{F}(\sigma_2) \qquad (2.13a)$$

et pour la correspondance fonctionnelle inverse $\mathcal{G}$ on a de même :

$$\mathcal{G}(\lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2) = \lambda_1\mathcal{G}(\varepsilon_1) + \lambda_2\mathcal{G}(\varepsilon_2) \qquad (2.13b)$$

Ainsi nous pouvons écrire la linéarité du comportement lorsque l'on superpose deux histoires et celles qui leur sont associées :

$$\sigma(t) = \begin{cases} \mathcal{G}\left[{}_{-\infty}^{t}\varepsilon_1(\tau) + {}_{-\infty}^{t}\varepsilon_2(\tau)\right] = \mathcal{G}\left[{}_{-\infty}^{t}\varepsilon_1(\tau)\right] + \mathcal{G}\left[{}_{-\infty}^{t}\varepsilon_2(\tau)\right] \\ \mathcal{G}\left[\lambda\varepsilon_{-\infty}^{t}(\tau)\right] = \lambda\,\mathcal{G}\left[\varepsilon_{-\infty}^{t}(\tau)\right] \qquad \text{(avec } \lambda \text{ un réel)} \end{cases} \qquad (2.14)$$

La conséquence directe de cette condition de linéarité nous montre donc que la fonction de retard ou de fluage $J(t, t_0, \sigma_0)$ est indépendante de σ_0. Inversement, la fonction de relaxation $R(t, t_0, \varepsilon_0)$ est également indépendante de ε_0.

II-4-1-Formulation Boltzmannienne

En utilisant la linéarité du comportement, on peut exprimer la réponse à toute histoire de sollicitation en contrainte ou en déformation à partir de la connaissance des fonctions de retard J et de relaxation R.

Si nous considérons par exemple une histoire de contrainte $\sigma(t)$ comme une superposition d'échelons infiniment petits $d\sigma(\tau)H(t-\tau)$ et éventuellement des sauts notés $[\sigma]_i$ aux instants τ_i. La déformation est, selon la définition de la linéarité, la superposition des réponses $d\varepsilon(t)$ produites par ces échelons $d\sigma(\tau)H(t-\tau)$. Ainsi, $d\sigma(\tau)$ produit une déformation $d\varepsilon(t)$ à un instant postérieur à τ. On peut alors écrire la relation qui relie $d\varepsilon(t)$ à $d\sigma(\tau)$ par :

$$d\varepsilon(t) = J(t,\tau)d\sigma(\tau) \qquad (2.15)$$

On en déduit alors que :

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} J(t,\tau)d\sigma(\tau) + \sum_i J(t,\tau_i)[\sigma]_i \qquad (2.16)$$

L'expression (2.16) peut être réécrite sous la forme :

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} J(t,\tau)\dot{\sigma}(\tau)d\tau \qquad (2.17)$$

Où $\dot{\sigma}(\tau)$ est la dérivée de $\sigma(\tau)$ par rapport à τ au sens de distribution, c'est-à-dire :

$$\dot{\sigma}(\tau) = \begin{cases} \dfrac{d\sigma(\tau)}{d\tau} & \text{si } \sigma(\tau) \text{ est dérivable en } \tau \\ [\sigma]_i \,\delta\tau_i & \text{en } \tau = \tau_i \text{, où il y a un saut de contrainte} \end{cases} \qquad (2.18)$$

Dans l'expression (2.18), $\delta\tau_i$ représente la distribution de Dirac en τ_i.

En effectuant une intégration par partie de l'expression (2.17) on a :

On pose : $U = J(t,\tau)$; $U' = \dfrac{\partial J(t,\tau)}{\partial \tau}$

$$V' = \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} \; ; \; V = \sigma(\tau)$$

Après intégration nous obtenons la formule de Boltzmann suivante :

$$\varepsilon(t) = \sigma(t)J(t,t) - \int_{-\infty}^{t} \sigma(\tau)\frac{\partial J(t,\tau)}{\partial \tau}d\tau \qquad (2.19)$$

- Le terme $\sigma(t)J(t,t)$ représente la réponse en élasticité instantanée
- L'intégrale $-\int_{-\infty}^{t} \sigma(\tau)\frac{\partial J(t,\tau)}{\partial \tau}d\tau$ représente l'effet mémoire de toute l'histoire de contrainte σ antérieure à l'instant t et exprime le comportement différé du matériau.

La formule (2.19) peut se mettre sous la forme d'une intégrale de Stieltjes car la dérivée partielle par rapport à τ de $J(t,\tau)$, est prise au sens de distributions :

$$\frac{\partial J(\bullet,t)}{\partial \tau} = \left\{\frac{\partial J(\bullet,t)}{\partial \tau}\right\} - J(t,t)\delta_t \qquad (2.20)$$

D'où l'intégrale de Stieltjes :

$$\varepsilon(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\tau)\frac{\partial J(\tau,t)}{\partial \tau}d\tau \qquad (2.21)$$

Ceci permet de compléter l'interprétation physique de la formule (2.19) de Boltzmann :

- ✓ Issu de l'expérience de retard, $J(\tau,t)$ est la complaisance élastique donnant la réponse instantanée à l'échelon unité appliqué à l'instant t.
- ✓ $-\frac{\partial J(\tau,t)}{\partial \tau}$ est la réponse observée à l'instant t, à l'impulsion unité appliquée à l'instant τ, avec $\tau \prec t$.

De la même manière, si nous considérons cette fois ci une histoire de déformation $\varepsilon(t)$, nulle pour $t = -\infty$, continue et dérivable par morceau par rapport au temps, et représentant des sauts $[\varepsilon]_i$ aux instants τ_i. En procédant comme précédemment, on a :

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} R(\tau,t)\dot{\varepsilon}(\tau)d\tau \qquad (2.22)$$

En intégrant (2.22) par partie, nous obtenons la formule de Boltzmann :

$$\sigma(t) = \varepsilon(t)R(t,t) - \int_{-\infty}^{t} \varepsilon(\tau)\frac{\partial R(\tau,t)}{\partial \tau}d\tau \qquad (2.23)$$

Ou encore sous une forme d'intégrale de Stieltjes :

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau,t)\dot{\varepsilon}(\tau)d\tau \qquad (2.24)$$

II-4-2-Opérateur d'intégral appliqué aux formules de Boltzmann

Pour accroitre la lisibilité des formules et faciliter la comparaison entre les matériaux vieillissants et ceux qui sont dits non vieillissants, on peut adopter pour les correspondances fonctionnelles (2.12a) et (2.12b) la forme (2.25), explicitée par (2.19) et (2.23) :

$$\begin{cases} \sigma \xrightarrow{\mathscr{T}} \varepsilon \ = -\left\langle \dfrac{\partial J}{\tau}, \sigma \right\rangle = J \otimes \sigma \\ \varepsilon \xrightarrow{\mathscr{C}} \sigma \ = -\left\langle \dfrac{\partial R}{\partial \tau}, \varepsilon \right\rangle = R \otimes \varepsilon \end{cases} \qquad (2.25)$$

- **Elément neutre :**

Si la fonction de retard $J(\tau,t) = H_{\tau}(t) = H(t-\tau)$ ou celle de relaxation $R(\tau,t) = H_{\tau}(t) = H(t-\tau)$, on a évidemment :

$$\begin{cases} \forall\ \sigma,\ J \otimes \sigma = \sigma \\ \forall\ \varepsilon,\ R \otimes \varepsilon = \varepsilon \end{cases} \qquad (2.26)$$

- **Formules d'inversion :**

En décrivant les expériences de retard et de relaxation au moyen des formules générales (2.25), on obtient les identités évidentes, valable $\forall t_0$:

$$J_{t_0} = J \otimes H_{t_0} \qquad (2.27a)$$

$$R_{t_0} = R \otimes H_{t_0} \qquad (2.27b)$$

L'inversion de (2.27a) et (2.27b) par (2.25) fournit les relations :

$$\forall t_0 , R \otimes J_{t_0} = H_{t_0} \quad (2.28)$$

$$\forall t_0 , J \otimes R_{t_0} = H_{t_0} \quad (2.29)$$

Ces deux formules explicitent la façon dont les fonctions de retard et de relaxation sont inverses les unes des autres pour l'opérateur intégral [14].

II-5-Comportement linéaire non vieillissant

Le vieillissement est une propriété générale de tout matériau à partir de l'instant de son élaboration, il se manifeste de façon plus ou moins marquée suivant le cas et suivant aussi les époques de l'histoire du matériau concerné. C'est ainsi qu'il existe souvent pour un matériau donné, une période significative où ses propriétés mécaniques sont en quelque sorte « stabilisées » et n'évoluent pas avec le temps. Le matériau considéré est alors dit non vieillissant.

Lorsque l'on modifie les instants t_i d'application de la sollicitation, la réponse viscoélastique de ce matériau non vieillissant subit une simple translation dans le temps (figure 6).

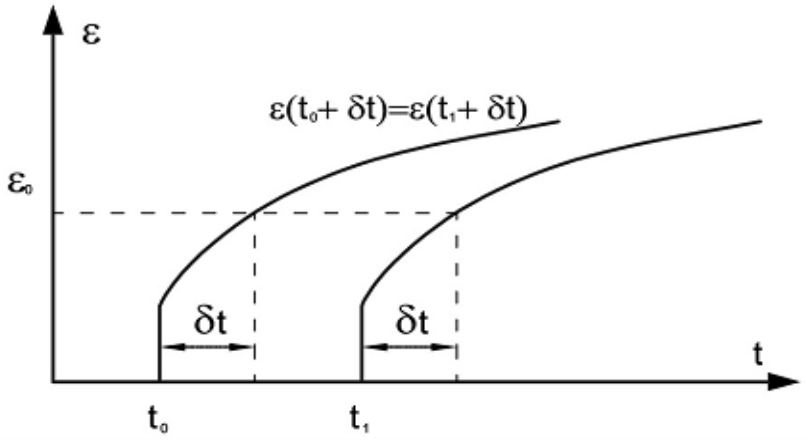


Figure 6 : Réponses viscoélastiques non vieillissants obtenues par décalage du temps de mise sous sollicitation

On en déduit que les fonctions de complaisance $J(\tau,t)$ et de relaxation $R(\tau,t)$ ne dépendent des arguments τ et t que par leur différence $(t-\tau)$. Dans ce cas on peut remplacer

les fonctions précédentes par les fonctions $f(t-\tau)$ et $g(t-\tau)$, qui sont introduites pour désigner les fonctions de fluage et de relaxation pour le matériau viscoélastique non vieillissant. L'application du principe de superposition de Boltzmann nous permet de mettre en évidence les propriétés suivantes :

- **Fonction de retard du matériau non vieillissant :**

$$\begin{cases} J(\tau,t) = f(t-\tau) \\ f(\tau) = 0 \text{ si } \tau \prec 0 \\ f(0) = f(0^+) \succ 0 \\ f(t-\tau) \text{ croissante en fonction de } t \text{ pour } \tau \prec t \\ f(t-\tau) \text{ continue et continument dérivable par rapport à } \tau \text{ et à } t \text{ pour } \tau \succ t \end{cases} \qquad (2.30)$$

- **Fonction de relaxation du matériau non vieillissant :**

$$\begin{cases} R(\tau,t) = g(t-\tau) \\ g(\tau) = 0 \text{ si } \tau \prec 0 \\ g(0) = g(0^+) \succ 0 \\ g(t-\tau) \text{ décroissante en fonction de } t \text{ pour } \tau \prec t \\ g(t-\tau) \text{ continue et continument dérivable par rapport à } \tau \text{ et à } t \text{ pour } \tau \succ t \end{cases} \qquad (2.31)$$

- **Les propriétés des fonctions *f* et *g* :**

Pour un matériau non vieillissant dit Boltzmanien, ces fonctions donnent leur comportement instantané. En effet, le comportement est élastique si la réponse instantanée dans un essai de fluage (avec σ_0 appliquée) est non nulle et si la recouvrance instantanée est totale quand $\tau_1 \to \tau_0$ du faite de la continuité de *f*. Dans ce cas, on a l'expérience de charge et décharge :

$$\lim_{\tau_1 \to \tau_0} \left\{ \varepsilon(t) = \left[f(t-\tau_0) - f(t-\tau_1) \right] \sigma_0 \right\} = 0 \quad \forall t \succ \tau_1 \succ \tau_0 \qquad (2.32)$$

De même le comportement instantané est élastique si la réponse instantanée dans un essai de relaxation (avec ε_0 appliquée) est finie et l'effacement instantané est total quand $\tau_1 \to \tau_0$:

$$\lim_{\tau_1 \to \tau_0} \left\{ \sigma(t) = \left[g(t-\tau_0) - g(t-\tau_1) \right] \varepsilon_0 \right\} = 0 \quad \forall t \succ \tau_1 \succ \tau_0 \qquad (2.33)$$

Grace à ces fonctions, les formules (2.19) et (2.23) de Boltzmann pour un matériau non vieillissant, sont obtenues par un produit de convolution de Riemann ou de Stieltjes entre la contrainte σ_0 (ou la déformation ε_0) et de la dérivée f (ou g) au sens des distributions. Mathématiquement, on note ce produit par $(*)$, et qui est défini pour deux fonctions *X(t)* et *Y(t)* par :

$$X(t) * Y(t) = \int_{-\infty}^{t} X(t-\tau) Y(\tau) d\tau \qquad (2.34)$$

Ainsi donc nous noterons aussi le produit de convolution de Riemann pour la contrainte ou la déformation.

$$\varepsilon(t) = f'(t) * \sigma(t) \qquad (2.35)$$

$$\sigma(t) = g'(t) * \varepsilon(t) \qquad (2.36)$$

La dérivée d'un produit de convolution est donnée par la formule suivante :

$$\left[f(t) * g(t) \right]' = f'(t) * g(t) = f(t) * g'(t) \qquad (2.37)$$

Conclusion :

L'analyse uniaxiale fournit le prototype de toute loi de comportement viscoélastique linéaire unidimensionnelle pour un système soumis à une sollicitation définit par un paramètre unique ou pour élément de structure dont les efforts intérieurs sont unidimensionnels. Les expériences d'identification uniaxiales du comportement du matériau montrent que la réponse à une sollicitation instantanée, est en générale constituée d'une partie acquise instantanément et d'une autre partie différée.

CHAPITRE III : COMPORTEMENT LINEAIRE TRIDIMENSIONNEL

Introduction :

L'objet du présent chapitre est, sur la base des concepts déjà introduits au chapitre précédent, d'établir quelques formulations des lois de comportement viscoélastique linéaire pour un milieu continu tridimensionnel. Nous allons faire appel éventuellement au principe de correspondance élastique-viscoélastique, aux dérivées fractionnaires pour optimiser le nombre des paramètres rhéologiques afin de contribuer au développement de ces lois de comportement. Nous rappelons aussi que le travail est effectué dans l'hypothèse des petites perturbations à partir de l'état initial naturel et des évolutions isothermes.

III-1-Formulation différentielle

Elle consiste à relier la contrainte σ_{ij} à la déformation ε_{ij} par deux opérateurs différentiels temporels linéaires :

$$P(\sigma) = Q(\varepsilon) \qquad (3.1)$$

P et Q s'écrivent respectivement :

$$P = \sum_{n=0}^{M} a_n \frac{\partial^n}{\partial t^n} \quad \text{et} \quad Q = \sum_{n=0}^{N} b_n \frac{\partial^n}{\partial t^n} \qquad (3.2)$$

a_n et b_n sont des coefficients caractéristiques du matériau, N et M sont des entiers. L'évaluation de P et Q est très complexe voire même impossible parce que cette formulation exige des dérivations très difficiles de mettre en œuvre numériquement. Par conséquent, l'utilisation de cette formulation s'avère très délicate, mais tout de même, dans la

modélisation mécanique du comportement, elle présente un intérêt particulier pour le matériau viscoélastique.

III-2-Formulation par une fonctionnelle

C'est une convolution linéaire liant le signal d'entrée que nous pouvons prendre par exemple la déformation $\varepsilon_{ij}(t)$ au signal de sortie $\sigma_{ij}(t)$. On peut écrire :

$$\sigma_{ij}(t) = F_{-\infty}^{t}\left[\varepsilon_{ij}(t,t_0)\right] \qquad (3.3)$$

Dans (3.3), t_0 désigne l'instant d'observation et t est la variable temps. S'il faut à la fois t et t_0 pour étudier la réponse $\sigma_{ij}(t)$, on dit que le matériau est vieillissant ou à mémoire longue. Cette appellation signifie que l'instant d'observation t_0 n'est pas indifférent dans le comportement du matériau. La simplification de la formulation mathématique du problème s'effectue grâce à une hypothèse supplémentaire qui dit que le matériau est à mémoire courte et que seul l'intervalle de temps t-t_0 compte, peu importe la valeur de t_0. En translation temporelle, l'opérateur F peut être invariant :

$$\sigma_{ij}(t-t_0) = F_{-\infty}^{t}\left[\varepsilon_{ij}(t-t_0)\right] \qquad (3.4)$$

Il s'agit de négliger le phénomène de vieillissement du matériau.

On peut écrire :

$$\sigma_{ij}(t) = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{t} R_{ijkl}(\tau)\varepsilon_{kl}(t-\tau)d\tau \qquad (3.5)$$

Ou inversement :

$$\varepsilon_{ij}(t) = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{t} J_{ijkl}(\tau)\sigma_{kl}(t-\tau)d\tau \qquad (3.6)$$

La condition régissant (3.5) et (3.6) concerne la causalité qui régit tout système physique réaliste. Cette causalité se traduit par le fait que l'on ne peut prédire l'avenir, autrement dit l'effet ne peut précéder la cause. Donc pour un matériau à mémoire courte ou non vieillissant, on réécrit (3.5) et (3.6) sous la forme :

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(t) = \dfrac{d}{dt}\int_{-\infty}^{t} J_{ijkl}(t-\tau)\sigma_{kl}(\tau)d\tau \\ \sigma_{ij}(t) = \dfrac{d}{dt}\int_{-\infty}^{t} R_{ijkl}(t-\tau)\varepsilon_{kl}(\tau)d\tau \end{cases} \quad (3.7)$$

Les fonctions de fluage et de relaxation possèdent les propriétés suivantes :

- ✓ $\forall t \prec \tau$, $J_{ijkl}(t-\tau) = 0$; $\forall t \prec \tau$, $R_{ijkl}(t-\tau) = 0$

  Ou $J_{ijkl}(t) = 0$ pour $t=0$; $R_{ijkl}(t) = 0$ pour $t=0$

- ✓ Comme pour le tenseur d'élasticité, les fonctions de fluage et de relaxation possèdent des propriétés de symétrie :

$$J_{ijkl} = J_{klij} = J_{jikl} = J_{ijlk} \quad \text{et} \quad R_{ijkl} = R_{klij} = R_{jikl} = R_{ijlk}$$

Dans le domaine fréquentiel, cette formulation fonctionnelle s'introduit grâce à l'usage de la transformation de Laplace et celle de Carson que nous allons expliciter.

III-3-Formulation par des dérivées fractionnaires

Un grand nombre de mathématiciens comme Grundwald, Cauchy, Leibniz, Riemann-Louville, Oldham, Rubin, Podlubny, Oustaloup, et bien d'autres ont présenté diverses origines des dérivées et d'intégrations non entières. Ils ont développé dans leurs ouvrages les définitions et les approches numériques de la dérivée non entière que nous n'allons pas exposer ici dans toutes leurs généralités, mais le lecteur intéressé peut consulter les références [22], [23], [24], et [25] pour en savoir plus. Les mécaniciens ont utilisé cet outil pour décrire le comportement viscoélastique des matériaux. L'approche classique consiste à lier la contrainte à la déformation par une forme qui s'écrit :

$$\sigma_{ij}(t) + \sum_{k=1}^{N} a_k D^{\alpha_k}\sigma_{ij}(t) = E_0\varepsilon_{ij}(t) + \sum_{k=1}^{N} b_k D^{\beta_k}\varepsilon_{ij}(t) \quad (3.8)$$

Où les indices α_k et β_k représentent des ordres de dérivations non entières, qui sont en faite des valeurs fractionnaires comprises entre 0 et 1. Les constantes a_k et b_k sont les

coefficients caractéristiques du matériau, D^{α} (ou D^{β}) désigne l'opérateur de la dérivation non entière d'ordre α (ou β) et qui est définit pour une fonction $f(t)$ par :

$$D^{\alpha} f(t) = \frac{d^{\alpha} f(t)}{dt^{\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau \qquad (3.9)$$

Où Γ représente la fonction gamma et est définie pour tout réel z strictement positif par :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z-1} dx \qquad (3.10)$$

La dérivée fractionnaire prend en compte les valeurs de *f* à tous les instants du passé. Elle donne une caractérisation globale de la fonction *f(t)*. En tenant compte de tout le passé de la fonction, elle permet de discriminer les fonctions dont le passé est différent. Cette propriété est donc utilisée pour caractériser les courbes des fonctions dont le nombre des paramètres est réduit. L'utilisation de la transformée de Fourier est un moyen simple pour définir la dérivée non entière parce qu'elle a l'avantage d'avoir des expressions très commodes d'emploi.

III-4- Les transformées intégrales

Ce sont les transformées de Laplace, Carson et Fourier, utilisées et abondamment exposées dans les traités de viscoélasticité. Elles permettent de résoudre un problème viscoélastique linéaire en faisant correspondre le comportement des matériaux dans le domaine temporel à celui obtenu dans le domaine fréquentiel.

III-4-1- Méthode de Fourier

On appelle la transformée de Fourier d'une fonction *F(t)* la quantité suivante :

$$\tilde{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{i\omega t} dt \qquad (3.11)$$

Avec $\omega = 2\pi f$ la pulsation et f la fréquence.

Une propriété de la transformée de Fourier stipule que si la fonction $F(t)$ est *n* fois dérivable, et que $|F|,|F'|,...|F^{(n)}|$ sont intégrables dans le domaine réel, alors on a :

$$\tilde{F}^{(n)}(\omega) = (i\omega)^n \tilde{F}(\omega) \qquad (3.12)$$

III-4-1-1-Pour une formulation différentielle

En appliquant la formule (3.12) de la transformée de Fourier sur l'équation (3.1), on obtient :

$$(i\omega)^m \tilde{\sigma}(\omega) = (i\omega)^n \tilde{\varepsilon}(\omega) \quad (3.13)$$

En posant respectivement $P(\omega) = (i\omega)^m$ et $Q(\omega) = (i\omega)^n$ deux polynômes d'ordre m et n, ayant des propriétés telles que pour des raisons de monotonie des fonctions de relaxation et de fluage, les racines de $P(\omega)$ et $Q(\omega)$ doivent être simples, réelles et négatives. Elles doivent également être rangées dans un ordre alterné. L'expression (3.13) ci-dessus devient :

$$P(\omega)\tilde{\sigma}(\omega) = Q(\omega)\tilde{\varepsilon}(\omega)$$

$$\Rightarrow \tilde{\sigma}(\omega) = \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \tilde{\varepsilon}(\omega)$$

$$\Rightarrow \tilde{\sigma}(\omega) = E^*(\omega)\tilde{\varepsilon}(\omega) \qquad (3.14)$$

Avec $E^*(\omega)$ le module de Young complexe.

III-4-1-2-Pour un problème défini par une fonctionnelle

Dans (3.7) on peut prendre la borne supérieure à $+\infty$, cela implique que l'on inclut l'intervalle de temps $(t \prec \tau \prec +\infty)$ au-delà de l'instant t considéré. La causalité imposée aux noyaux $R_{ijkl}(\tau)$ et $J_{ijkl}(\tau)$ exige que ces fonctions doivent y être identiquement nulles. On peut écrire (3.7) sous la forme :

$$\sigma_{ij}(t) = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} R_{ijkl}(t-\tau)\varepsilon_{kl}(\tau)d\tau \qquad (3.15a)$$

$$\varepsilon_{ij}(t) = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} J_{ijkl}(t-\tau)\sigma_{kl}(\tau)dt \qquad (3.15b)$$

En appliquant la transformée de Fourier à (3.15a), on a :

$$\tilde{\sigma}_{pq}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} R_{pqkl}(t-\tau)\varepsilon_{kl}(\tau)d\tau\right]e^{-i\omega t}dt$$

$$\Rightarrow \tilde{\sigma}_{pq}(\omega) = i\omega\tilde{R}_{pqkl}(\omega)\tilde{\varepsilon}_{kl}(\omega)$$

$$\tilde{\sigma}_{pq}(\omega) = R^{*}_{pqkl}(\omega)\tilde{\varepsilon}_{kl}(\omega) \qquad (3.16)$$

De la même manière pour (3.15b) :

$$\tilde{\varepsilon}_{pq}(\omega) = J^{*}_{pqkl}(\omega)\tilde{\sigma}_{kl}(\omega) \qquad (3.17)$$

Avec :

- $R^{*}_{pqkl}(\omega)$: le tenseur de relaxation complexe (rigidités complexes)
- $J^{*}_{pqkl}(\omega)$: le tenseur de retard à déformation
- $E^{*}(\omega) = R^{*}(\omega)$: Module de Young complexe dans le cadre unidimensionnel.

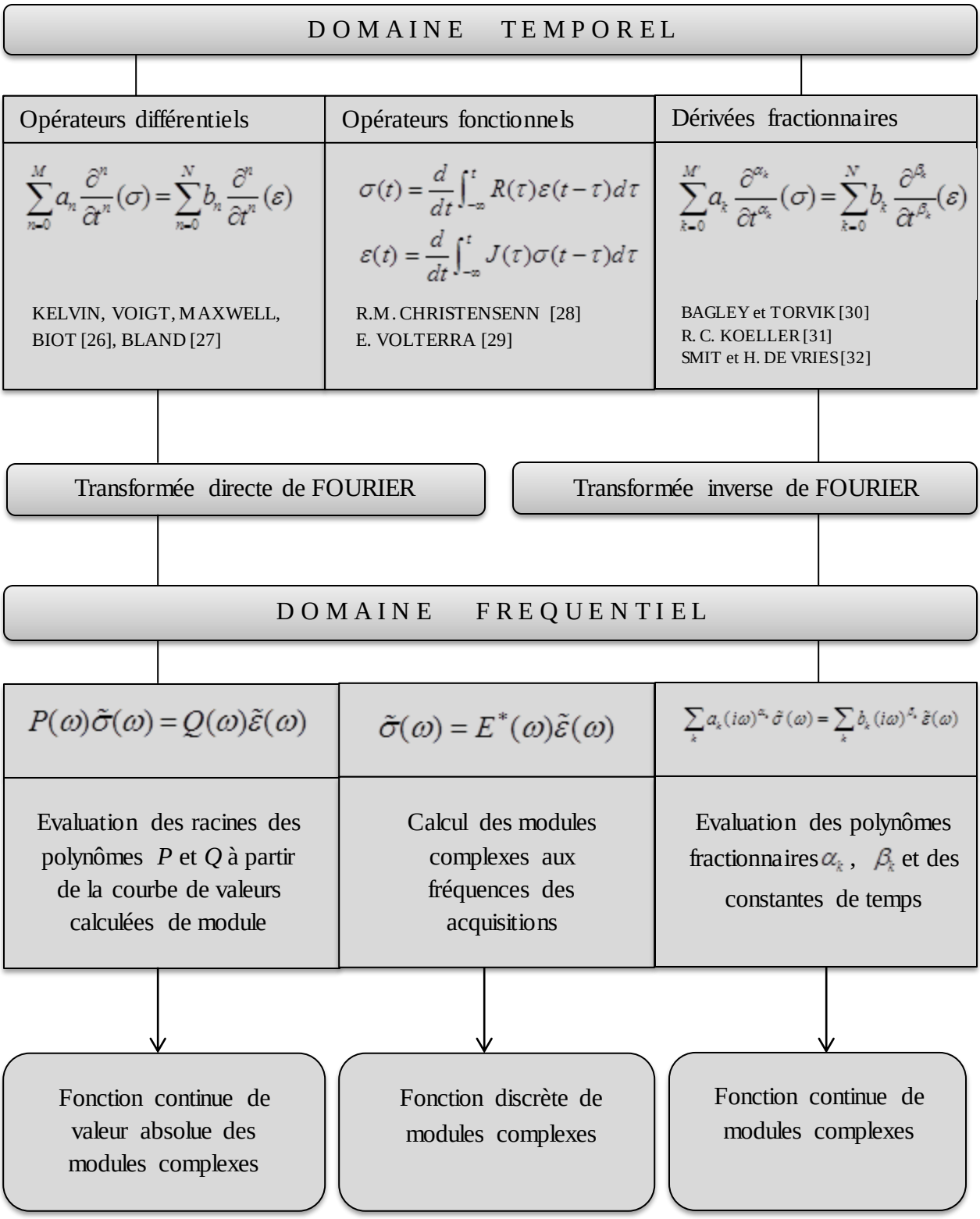
III-4-1-3- Pour un problème défini par des dérivées fractionnaires

La transformée de Fourier appliquée à (3.8) donne :

$$\tilde{\sigma}_{pq}(\omega) + \sum_{k=1}^{N} a_k (i\omega)^{\alpha_k}\tilde{\sigma}_{pq}(\omega) = E_0\tilde{\varepsilon}_{pq}(\omega) + \sum_{k=1}^{N} b_k (i\omega)^{\beta_k}\tilde{\varepsilon}_{pq}(\omega)$$

Avec $E^{*}(\omega) = \dfrac{E_0 + \sum_{k=1}^{N} b_k (i\omega)^{\alpha_k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k (i\omega)^{\beta_k}}$ le module de Young complexe.

Tableau1: illustration des lois de comportement et paramètres correspondants des matériaux viscoélastiques [8].



III-4-2- Méthode de Laplace-Carson

L'opérateur L de la transformation de Laplace et l'opérateur C de la transformation de Carson sont définis pour une fonction $f(t)$ par :

$$L[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = f(p), \text{ avec } p \text{ une variable complexe.} \qquad (3.18)$$

$$C[f(t)] = p\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = f^*(p) \qquad (3.19)$$

Où $f(p)$ est la transformée de Laplace de $f(t)$ et $f^*(p)$ est la transformée de Carson de $f(t)$.

La transformée de Laplace possède les propriétés suivantes sur le produit de convolution de deux fonctions *f(t), g(t)* et sur la dérivée:

$$L[f(t)*g(t)] = L[f(t)]L[g(t)] = f(p)g(p) \qquad (3.20)$$

$$L\left[f^{(n)}(t)\right] = p^n f(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(p) - \cdots - f^{(n-1)}(p) \qquad (3.21)$$

III-4-2-1-Pour une formulation différentielle

Lorsqu'on applique la transformée de Laplace de part et d'autre de l'égalité de l'expression (3.1), nous pouvons écrire en se servant de la propriété (3.21) :

$$\sigma(p)\left[a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_M p^M\right] = \varepsilon(p)\left[b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \cdots + b_N p^N\right]$$

On pose : $P^*(p) = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_M p^M$ et

$Q^*(p) = b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \cdots + b_N p^N$ où $P^*(p)$ et $Q^*(p)$ sont des polynômes d'ordre respectif M et N.

$$\Rightarrow \sigma(p) = \frac{Q^*(p)}{P^*(p)}\varepsilon(p)$$

$$\Rightarrow \sigma(p) = E^*(p)\varepsilon(p) \qquad (3.22)$$

Avec $E^*(p)$ le module complexe de Young.

III-4-2-2- Pour une formulation par une fonctionnelle

En se servant de (3.20), les lois de comportement (3.7) s'écrivent respectivement dans l'espace de Laplace et de Carson comme suit :

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(p) = J^*_{ijkl}(p)\sigma_{kl}(p) \\ \sigma_{ij}(p) = R^*_{ijkl}(p)\varepsilon_{kl}(p) \end{cases} \qquad (3.23)$$

Où J^*_{ijkl} est le tenseur d'ordre 4 des complaisances opérationnelles et R^*_{ijkl} le tenseur d'ordre 4 des modules opérationnels.

III-4-2-3-Pour une formulation par des dérivées fractionnaires

En appliquant la propriété (3.21) de la transformée de Laplace à l'expression (3.8) des dérivées fractionnaires, on écrit :

$$\sigma_{ij}(p)\left[1 + a_1 p^{\alpha_1} + a_2 p^{\alpha_2} + \cdots + a_k p^{\alpha_k}\right] = \varepsilon_{ij}(p)\left[E_0 + b_1 p^{\beta_1} + b_2 p^{\beta_2} + \cdots + b_k p^{\beta_k}\right]$$

si on pose : $a_0 = 1$ et $b_0 = E_0$

$$\Rightarrow \sigma_{ij}(p)\sum_{k=0}^{M} a_k p^{\alpha_k} = \varepsilon_{ij}(p)\sum_{k=0}^{N} b_k p^{\beta_k}$$

$$\Rightarrow \sigma_{ij}(p) = \frac{\sum_{k=0}^{N} b_k p^{\beta_k}}{\sum_{k=0}^{M} a_k p^{\alpha_k}} \varepsilon_{ij}(p)$$

$$\Rightarrow \sigma_{ij}(p) = E^*(p)\varepsilon_{ij}(p) \qquad (3.24)$$

Les différentes équations trouvées à partir de ces transformées intégrales sont analogues à la loi de Hooke généralisée reliant les contraintes aux déformations en élasticité linéaire. Cela nous conduit à énoncer le principe de correspondance élastique-viscoélastique [33].

III-5- Principe de correspondance élastique-viscoélastique

C'est un principe très exploité pour résoudre un problème de viscoélasticité linéaire. Il s'énonce comme suit : dans l'hypothèse des changements de géométrie négligeables et selon le principe d'Onsager (Salençon, 1983), la résolution de la plupart des problèmes pour un système constitué d'un matériau viscoélastique linéaire non vieillissant isotrope se ramène à la résolution du problème analogue pour le même système constitué d'un matériau élastique linéaire isotrope.

L'utilisation d'une des transformations intégrales dans un problème viscoélastique linéaire permet de ramener celui-ci dans le domaine fréquentiel (transformée de Fourier) ou dans l'espace de Laplace-Carson, à rechercher une solution similaire à la solution en régime élastique. Nous illustrons sur le schéma suivant le principe de correspondance (voir figure7).

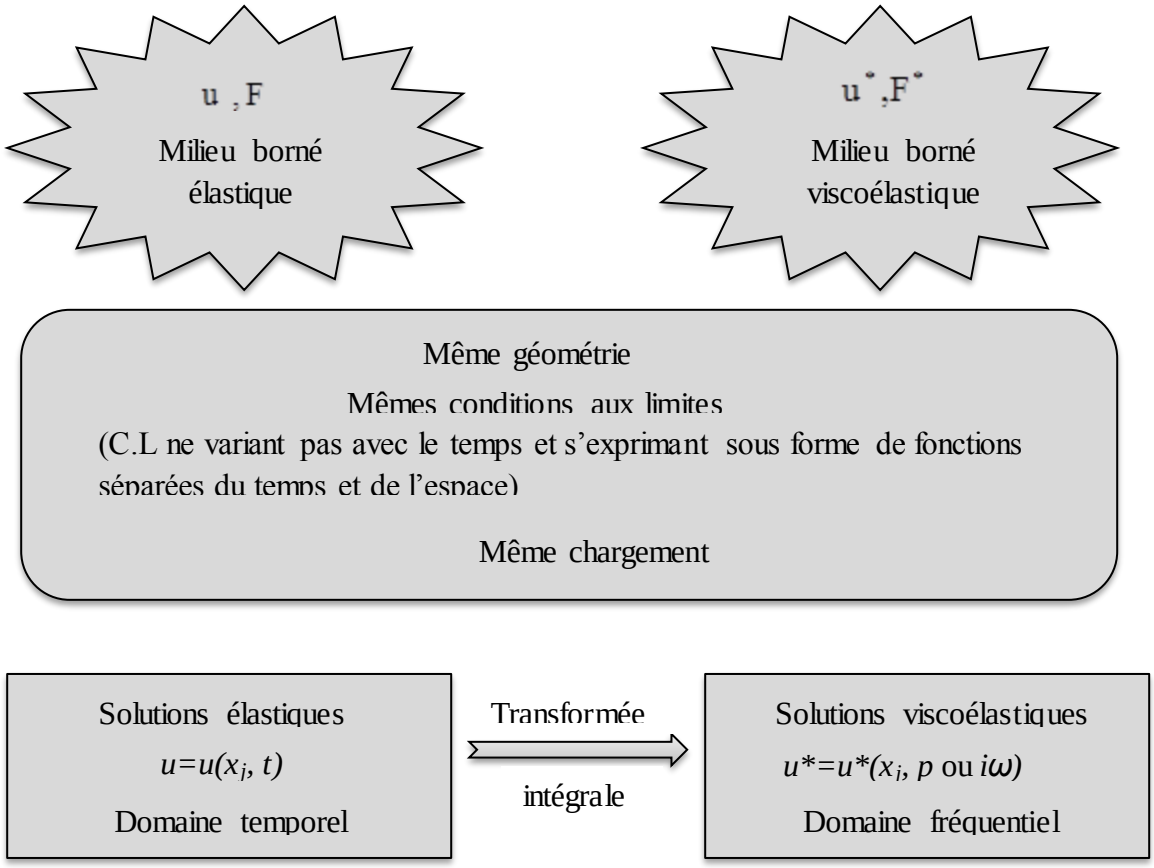


Figure 7 : Schéma du principe de correspondance

III-6- Notion d'amortissement

III-6-1-Loi de comportement pour une sollicitation harmonique

Considérons un matériau viscoélastique linéaire non vieillissant subissant des sollicitations harmoniques de la forme :

$$\sigma_{pq}(t) = \mathrm{Re}\left[\sigma_{pq}^{0} e^{i\omega t}\right] = \sigma_{pq}^{0}\cos(\omega t) \qquad (3.25)$$

Où **Re** désigne la partie réelle. Les déformations induites peuvent être déduites de la formule (3.15b) sous la forme :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{pq}(t) &= \sigma_{kl}^{0}\int_{-\infty}^{t} J_{pqkl}(t-\tau)\,\mathrm{Re}\left[i\omega e^{i\omega\tau}\right]d\tau \\ &= \sigma_{kl}^{0}\,\mathrm{Re}\left[i\omega\int_{-\infty}^{t} J_{pqkl}(t-\tau)e^{i\omega\tau}d\tau\right]\end{aligned} \qquad (3.26)$$

En procédant par un changement de variable, en posant $u = t - \tau$, l'expression (3.26) peut être réécrite sous la forme :

$$\varepsilon_{pq}(t) = \sigma_{kl}^{0}\,\mathrm{Re}\left[i\omega e^{i\omega t} \int_{0}^{+\infty} J_{pqkl}(u) e^{-i\omega u} du \right] \qquad (3.27)$$

En se basant sur la transformation de Carson (3.19), et en posant $p = i\omega$, l'expression (3.27) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \varepsilon_{pq}(t) = \sigma_{kl}^{0}\,\mathrm{Re}\left[J_{pqkl}^{*}(p) e^{i\omega t} \right] \\ J_{pqkl}^{*}(p) = C\left[J_{pqkl}(u) \right] = p\int_{0}^{+\infty} J_{pqkl}(u) e^{-pu} du \end{cases} \qquad (3.28)$$

Le tenseur $J_{pqkl}^{*}(i\omega)$ peut être décomposé en sa partie réelle et imaginaire :

$$J_{pqkl}^{*}(i\omega) = J'_{pqkl}(\omega) + iJ''_{pqkl}(\omega) \qquad (3.29)$$

Où $J'_{pqkl}(\omega)$ est appelé la complaisance de stockage et $J''_{pqkl}(\omega)$ la complaisance de perte.

De la même manière, pour une déformation harmonique de la forme :

$$\varepsilon_{pq}(t) = \mathrm{Re}\left[\varepsilon_{pq}^{0} e^{-i\omega t} \right] = \varepsilon_{pq}^{0} \cos(\omega t) \qquad (3.30)$$

La réponse correspondante en contrainte s'écrit :

$$\sigma_{pq}(t) = \varepsilon_{pq}^{0}\,\mathrm{Re}\left[R_{pqkl}^{*}(p) e^{i\omega t} \right] \qquad (3.31)$$

Avec $R_{pqkl}^{*}(i\omega)$ qu'on décompose en partie réelle et imaginaire :

$$R_{pqkl}^{*}(i\omega) = R'_{pqkl}(\omega) + iR''_{pqkl}(\omega) \qquad (3.32)$$

$R'_{pqkl}(\omega)$ est appelé module de stockage et $R''_{pqkl}(\omega)$ le module de perte.

III-6-2-Déphasage et amortissement

Le tenseur de complaisances opérationnelles J^*_{pqkl} et celui de modules opérationnels R^*_{pqkl} définis par les relations (3.29) et (3.32) peuvent s'écrire en adoptant la notation de nombre complexe comportant un module et une phase, soit :

$$\begin{cases} J^*_{pqkl}(i\omega) = \left|J^*_{pqkl}(i\omega)\right| e^{i\varphi(\omega)} \\ \tan(\varphi(\omega)) = \dfrac{\mathrm{Im}(R^*_{pqkl}(i\omega))}{\mathrm{Re}(R^*_{pqkl}(i\omega))} = \dfrac{R''_{pqkl}(\omega)}{R'_{pqkl}(\omega)} = \eta(\omega) \end{cases} \tag{3.33}$$

Avec **Re** représentant la partie réelle, **Im** celle de la partie imaginaire et $\left|R^*_{pqkl}(i\omega)\right|$ le module du nombre complexe. En utilisant (3.33) dans (3.30) et (3.31) on peut écrire :

$$\begin{cases} \varepsilon_{pq}(t) = \varepsilon^0_{pq}\cos(\omega t) \\ \sigma_{pq}(t) = \varepsilon^0_{pq}\left|R^*_{pqkl}(i\omega)\right|\cos(\omega t + \varphi(\omega)) \end{cases} \tag{3.34}$$

Cette relation traduit bien que pour une sollicitation harmonique, la contrainte et la déformation sont déphasées d'un angle $\varphi(\omega)$. La tangente de cet angle définit l'amortissement du matériau noté $\eta(\omega)$

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons établie les lois de comportement linéaire à partir des différentes formulations viscoélastiques. Nous avons adopté pour résoudre ce problème les transformées intégrales en utilisant la méthode de transformée de Laplace-Carson qui est purement un modèle mathématique, et la méthode de Fourier qui offre un contenu physique, tel que la fréquence et la mise en évidence de la périodicité du matériau. Ces deux méthodes nous ont permis d'identifier une similitude entre les lois de comportement linéaire viscoélastique et la loi de Hooke généralisée reliant les contraintes aux déformations en élasticité linéaire. Ainsi donc les formules de la complaisance de fluage et le module de relaxation sont développées et résolues par des méthodes analytiques en fonction du temps et des fréquences.

CHAPITRE IV : CHOIX ET VALIDATION DU MODELE VISCOELASTIQUE

Introduction :

Dans ce chapitre, nous allons présenter les modèles mathématiques pour les fonctions mémoires et les modules complexes permettant de décrire le comportement linéaire des matériaux viscoélastiques. L'objectif final de notre recherche est de déterminer le modèle rhéologique qui décrit le mieux possible, avec un minimum des paramètres, le comportement réel des élastomères pour une large gamme de fréquence considérée. Nous commencerons dans un premier temps à présenter brièvement l'acquisition des données expérimentales, en second lieu nous effectuerons une analyse de comportement de chacun des différents modèles rhéologiques classiques et les modèles dits composés ou généralisés. L'étude comparative entre le modèle expérimental et les modèles mathématiques va nous permettre de choisir un modèle adapté pour décrire le comportement de notre matériau viscoélastique.

IV-1-Appareillage et acquisition des données

IV-1-1-Appareillage

Le circuit d'acquisition des données dans le cas d'une traction alternée ou d'une torsion alternée est représenté sur la figure 8 ci-dessous. L'éprouvette utilisée a une forme cylindrique, et est placée dans une enceinte isotherme à température réglable pouvant aller de 0°C à 100°C ou de -18°C à 0°C [47].

Nous utilisons en translation un excitateur électromagnétique (pot vibrant) sollicité en bruit blanc (bande passante de 100KHz). En rotation l'excitateur est un moteur pas à pas sollicité en sinus (ce dispositif permet d'éliminer presque tout le phénomène de flexion dans l'essai de torsion). Le bruit blanc présente de peu de matériel utilisé pour l'obtention d'une

amplitude quasi-constante du signal d'excitation et aussi une rapidité dans l'expérimentation qui permet d'obtenir les acquisitions à une même température. Par contre le signal obtenu comporte de bruit.

Le déplacement relatif des deux plateaux horizontaux (masses) est mesuré au moyen des capteurs qui sont des accéléromètres piézoélectriques de sensibilité volt par accélération de la pesanteur (volt/g) travaillant dans une bande de fréquence allant de 200Hz à 100KHz. Ils convertissent le mouvement mécanique en un signal électrique. Ces signaux sont recueillis sur un analyseur de spectre qui effectue numériquement la transformée de Fourier et calcule les données nécessaires pour notre expérience.

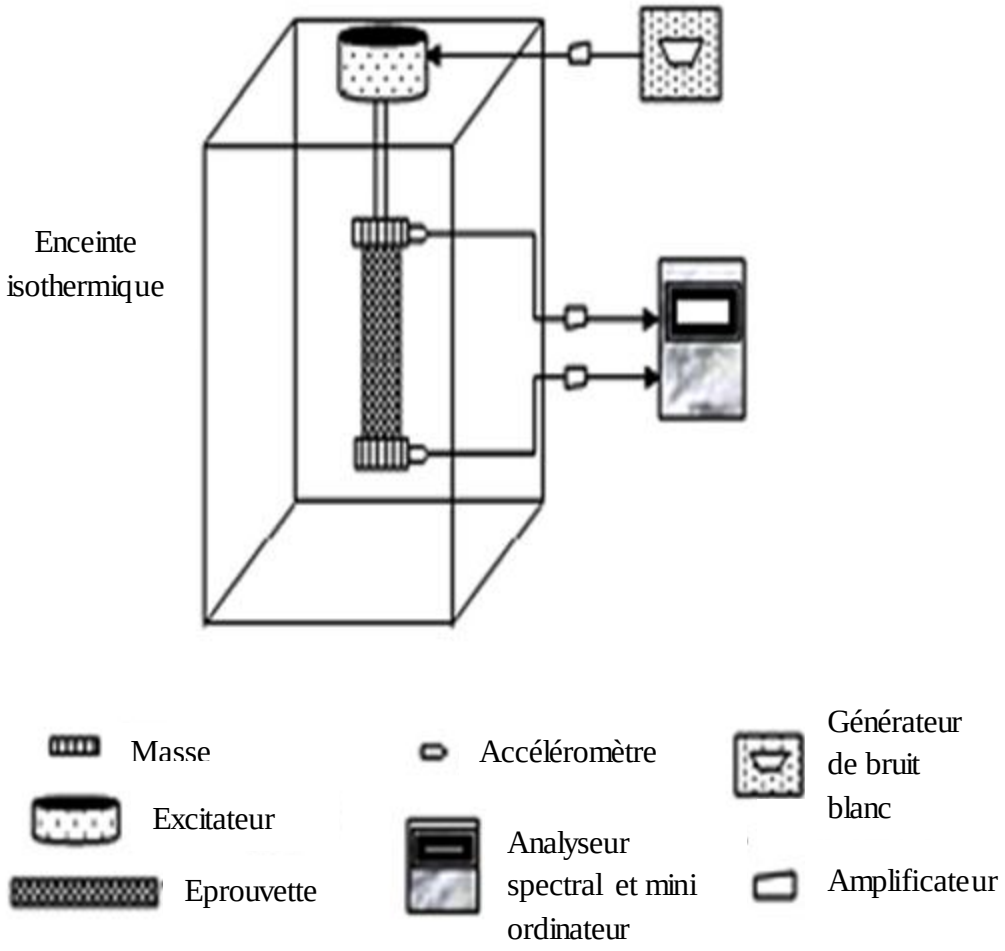


Figure 8 : Circuit d'acquisition des données expérimentales pour l'évaluation de module complexe d'Young des élastomères [34].

IV-1-2-Acquisitions des données

Les acquisitions sont obtenues grâce au mini ordinateur avec un logiciel qui fournit les coordonnées (x,y) du spectre point par point dans un repère orthonormée. Dans le cas de notre étude, nous avons utilisé le logiciel GETDATA GRAPH DIGITIZER 2.24 pour extraire les coordonnées des points constituant les courbes expérimentales du module complexe de Young et le coefficient d'amortissement du Paracril BJ0 PHR Carbone de NASHIF, JONES et al dans les travaux de T. BEDA et YVON CHEVALIER de 2008 [35]. Les figures 9 et 10 illustrent les courbes expérimentales que nous avons tracées avec le logiciel MATLAB 7.5.0 (R2007b).

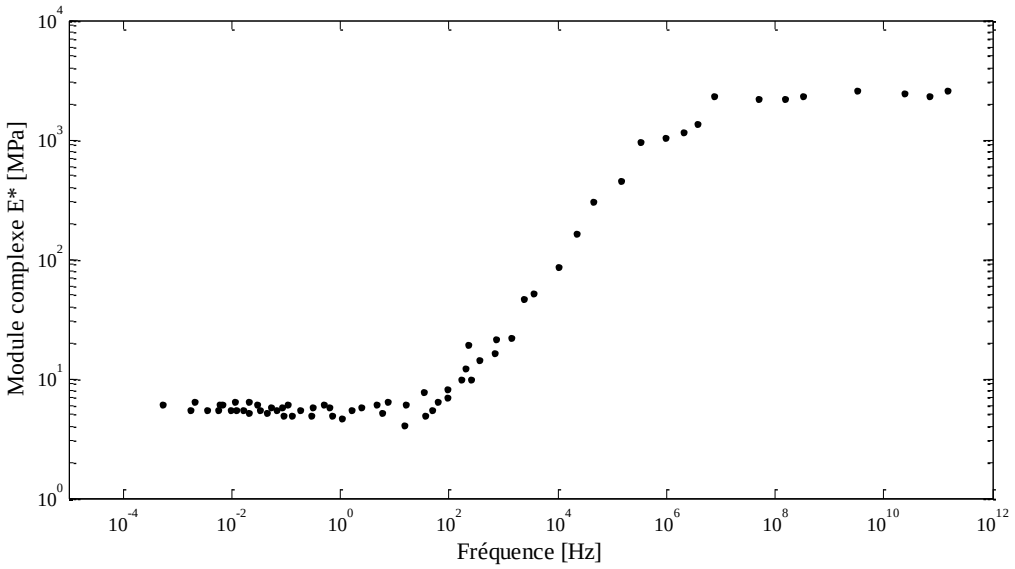


Figure 9 : Courbe expérimentale du module complexe du Paracril BJ0 PHR Carbone

Echelle : Log-Log

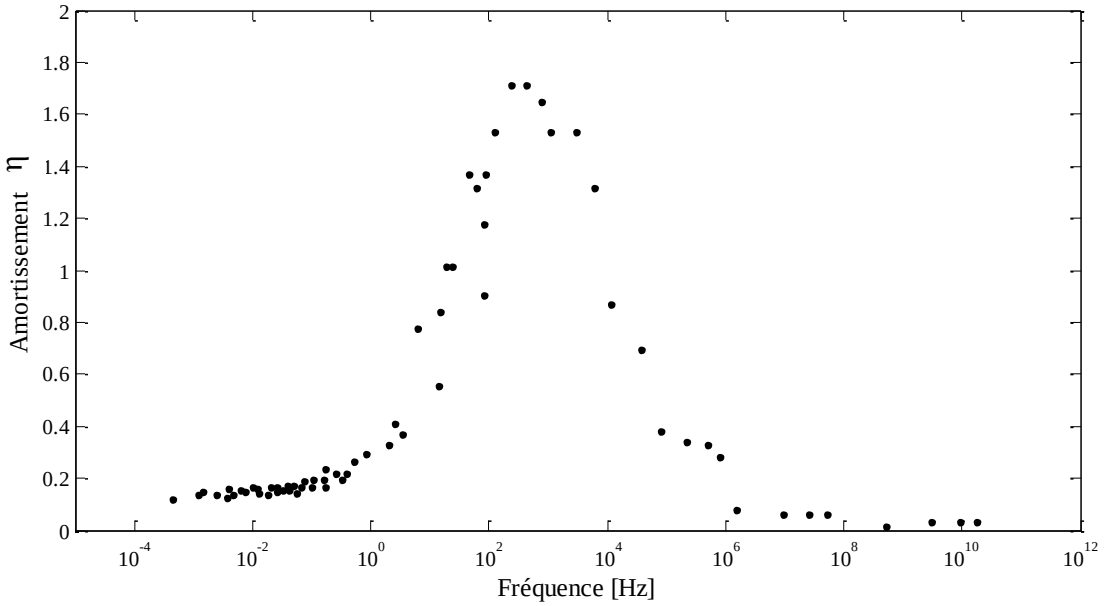


Figure 10 : Courbe expérimentale du coefficient d'amortissent η du Paracril BJ0 PHR Carbone

Echelle : Log-Lin

IV-2-Modèles viscoélastiques

IV-2-1-Modèles rhéologiques de base

Les instruments les plus classiques de la modélisation rhéologique sont constitués par un ressort qui modélise un solide élastique parfait et un amortisseur celui d'un fluide visqueux newtonien. Le comportement viscoélastique linéaire est représenté en général par la construction d'un modèle constitué d'un assemblage de ressorts et d'amortisseurs. Il s'agit donc d'un modèle symbolique et analogue. Le matériau viscoélastique sera représenté par une association de ressorts et d'amortisseurs en série et en parallèle plus ou moins complexe. L'équation rhéologique du matériau est obtenue en utilisant les équations rhéologiques des constituants élémentaires (ressort et amortisseur) et en respectant aussi les lois d'association en série et en parallèle des différents éléments. La figure 11 montre ces éléments de base et leurs équations rhéologiques respectives.

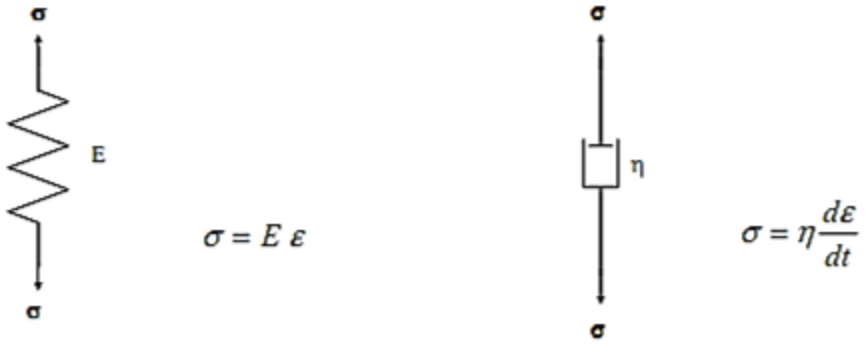
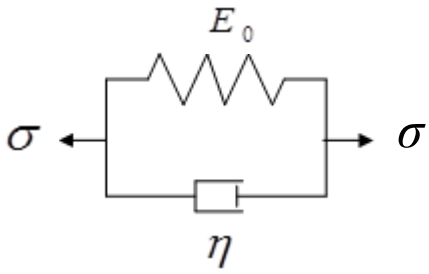


Figure 11 : Représentation rhéologique d'un solide élastique et d'un liquide newtonien

IV-2-2-Modèles analogiques

IV-2-2-1-Modèle de Kelvin-Voigt

Ce modèle résulte de l'association en parallèle d'un ressort de module d'élasticité E_0 et d'un amortisseur de coefficient de viscosité η. Il est particulièrement bien adapté pour représenter le comportement d'un solide.



Soient ε_r et ε_a les déformations, σ_r et σ_a les contraintes, respectivement dans le ressort et dans l'amortisseur. On a :

$$\begin{cases} \sigma_r = E_0 \varepsilon_r \\ \sigma_a = \eta \dfrac{d\varepsilon_a}{dt} \end{cases} \qquad (4.1)$$

D'après les lois d'association en parallèle, la déformation et la contrainte totales s'écrivent :

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_r = \varepsilon_a \\ \sigma = \sigma_r + \sigma_a \end{cases} \qquad (4.2)$$

L'équation rhéologique s'écrit donc : $\sigma = E_0\varepsilon + \eta\frac{d\varepsilon}{dt}$ (4.3)

En résolvant l'équation différentielle (4.3), on obtient l'expression de la fonction de fluage de Kelvin-Voigt :

$$J(t) = \frac{1}{E_0}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \qquad (4.4)$$

Avec $\tau = \frac{\eta}{E_0}$, possédant les dimensions d'un temps et qui est appelé temps de retard. Nous avons illustré le tracé de cette fonction sur la figure ci-dessous (figure 11).

La relaxation est impossible avec ce modèle, car il ne peut pas subir une déformation instantanée qui conduirait à une contrainte infinie.

En appliquant la transformée de Carson sur l'équation (4.3), nous obtenons le module complexe de ce modèle dans le domaine fréquentiel :

$$E^*(\omega) = E_0 + i\eta\omega \qquad (4.5)$$

Lorsqu'on analyse ce module complexe de Kelvin-Voigt, on trouve qu'il est trop simple pour pouvoir représenter le comportement expérimental, car la partie réelle du module complexe est une constante qui ne dépend pas de la fréquence et que la partie imaginaire croit linéairement avec celle-ci.

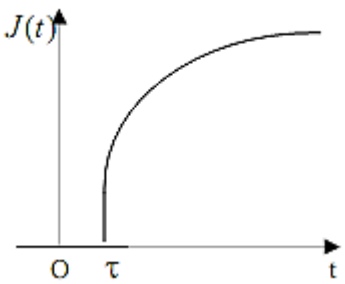
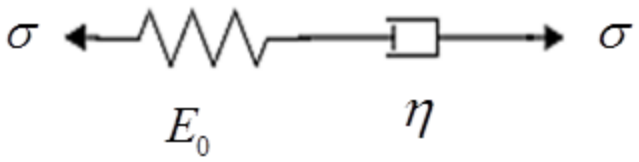


Figure 12: la réponse de fluage de Kelvin-Voigt

IV-2-2-2-Modèle de Maxwell

Il est constitué d'un ressort et d'un amortisseur montés en série représentant la réponse viscoélastique d'un matériau à une sollicitation mécanique. Cette représentation est plutôt réservée aux fluides.



En raisonnant de la même manière que précédemment, les lois d'association en série de la déformation et la contrainte totales s'écrivent :

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_r = \sigma_a \\ \varepsilon = \varepsilon_r + \varepsilon_a \end{cases} \qquad (4.6)$$

La dérivée de la déformation totale de l'équation (4.6) donne :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_r}{dt} + \frac{d\varepsilon_a}{dt} \qquad (4.7)$$

En combinant (4.1) et (4.7), nous obtenons l'équation rhéologique de modèle de Maxwell :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E_0}\frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{\eta}\sigma \qquad (4.8)$$

Après intégration de l'équation (4.8), on trouve les expressions de la fonction de fluage et celle de relaxation :

$$\begin{cases} J(t) = \dfrac{1}{E_0} + \dfrac{t}{\eta} \\ R(t) = E_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \end{cases} \qquad (4.9)$$

avec $\tau = \dfrac{\eta}{E_0}$ qui est le temps de retard de notre fonction de relaxation.

Les réponses de ces deux fonctions sont représentées sur la figure 12 ci-dessous :

a- Réponse en fluage b- Réponse en relaxation

Figure 13 : Réponses en fluage et en relaxation du modèle de Maxwell

Le module complexe de ce modèle de Maxwell s'obtient en appliquant la transformée de Laplace-Carson sur l'équation différentielle (4.8) :

$$\frac{1}{E^*(\omega)} = \frac{1}{E_0} + \frac{1}{i\eta\omega} \qquad (4.10)$$

Que l'on peut écrire encore en posant $\tau = \frac{\eta}{E_0}$:

$$E^*(\omega) = E_0 \frac{i\tau\omega}{1+i\tau\omega} \qquad (4.11)$$

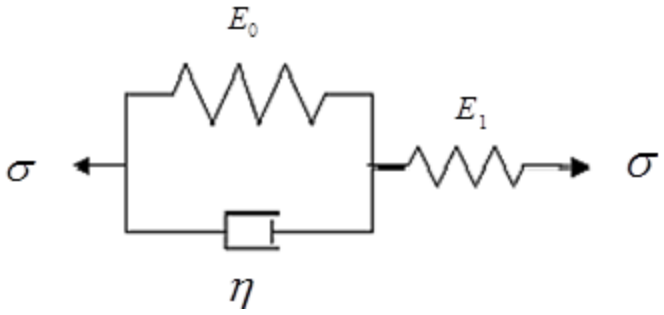
Si nous séparons la partie réelle et la partie imaginaire de ce module complexe de Maxwell, nous obtenons :

$$E^*(\omega) = \frac{E_0(\omega\tau)^2}{1+(\omega\tau)^2} + i\frac{\eta\omega}{1+(\omega\tau)^2} \qquad (4.12)$$

Ce modèle aussi ne présente pas totalement le comportement viscoélastique, car sa réponse en fluage (figure 12-a) est une fonction linéaire, qui ne correspond pas à celle réalisée par l'essai de retard ou de fluage (figure 1 du chapitre II) dans le cadre expérimental.

IV-2-2-3-Modèle de Zener

C'est un modèle constitué d'un modèle de Kelvin-Voigt associé en série avec un ressort de module d'élasticité E_1.



En suivant le même raisonnement que l'élément de Maxwell et connaissant aussi la contrainte pour celui de Kelvin, on trouve aisément l'équation de comportement du modèle de Zener :

$$(E_0 + E_1)\sigma + \eta\frac{d\sigma}{dt} = E_1(E_0\varepsilon + \eta\frac{d\varepsilon}{dt}) \qquad (4.13)$$

En appliquant la transformation de Laplace-Carson sur (4.13), nous obtenons le module complexe de ce modèle :

$$E^*(\omega) = \frac{E_0E_1 + i\eta E_1\omega}{E_0 + E_1 + i\eta\omega}$$

Factorisons par E_0E_1 au numérateur et par $E_0 + E_1$ au dénominateur, le module complexe devient :

$$E^*(\omega) = \frac{E_0E_1}{E_1 + E_1}\frac{(1 + i\frac{\eta}{E_0}\omega)}{(1 + i\frac{\eta}{E_0 + E_1}\omega)}$$

Posons : $E = \frac{E_0E_1}{E_0 + E_1}$, $\tau = \frac{\eta}{E_0}$ et $\tau_1 = \frac{\eta}{E_0 + E_1}$ on obtient :

$$E^*(\omega) = E\frac{1 + i\tau\omega}{1 + i\tau_1\omega} \qquad (4.14)$$

En séparant la partie réelle et la partie imaginaire, la relation (4.14) devient :

$$E^*(\omega) = E\frac{1+\tau_1\tau\omega^2}{1+(\tau_1\omega)^2} + iE\frac{(\tau-\tau_1)\omega}{1+(\tau_1\omega)^2} \qquad (4.15)$$

Les paramètres τ et τ_1 sont appelés respectivement temps caractéristiques de relaxation et temps à l'équilibre. E est assimilé à un module d'élasticité différée, dans la mesure où, au bout d'un temps infini, il relie linéairement contrainte et déformation c'est-à-dire $\dot{\sigma} = \dot{\varepsilon} = 0$. Enfin E_1 est le module d'élasticité instantanée.

Analysons et comparons le module du module complexe de (4.15) avec le module expérimental de la figure 9. Pour cela nous calculons le module du module complexe du modèle de Zener. En considérant la formule (4.15), on a :

$$\left|E^*(\omega)\right| = \left[E^2\frac{(1+\tau\tau_1\omega^2)^2}{(1+(\tau\omega)^2)^2} + E^2\frac{(\tau-\tau_1)^2\omega^2}{(1+(\tau\omega)^2)^2} \right]^{1/2}$$

En factorisant et en simplifiant certains termes, on obtient :

$$\left|E^*(\omega)\right| = \frac{E}{1+(\tau\omega)^2}\sqrt{1+(\tau^2+\tau_1^2)\omega^2+(\tau\tau_1)^2\omega^4} \qquad (4.16)$$

Calculons la limite de ce module (4.16) lorsque la pulsation tend vers l'infini :

$$\lim_{\omega\to\infty}\left|E^*(\omega)\right| = E\frac{\tau_1}{\tau} \qquad (4.17)$$

Au point $\omega = 0$, on a : $$\left|E^*(0)\right| = E \qquad (4.18)$$

Le rapport entre le temps à l'équilibre et le temps caractéristique de relaxation de l'égalité (4.17) donne :

$$\frac{\tau_1}{\tau} = \frac{E_0}{E_0+E_1} \prec 1 \qquad (4.19)$$

La relation (4.19) implique à dire que : $\lim_{\omega \to \infty} \left| E^*(\omega) \right| \prec \left| E^*(0) \right|$ (4.20)

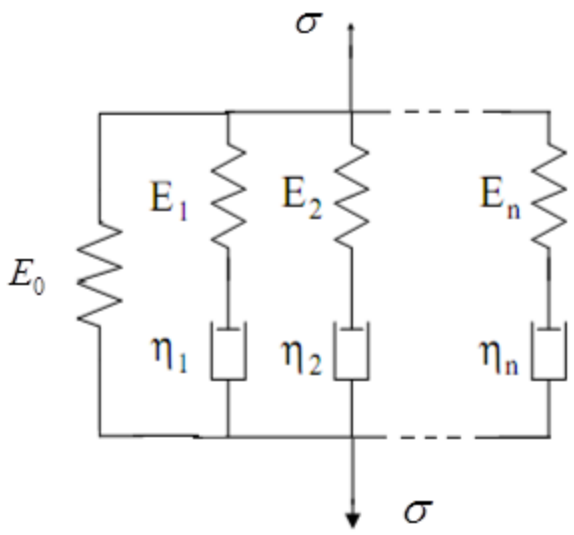
D'après la relation (4.20), on constate que le module de ce modèle de Zener à basses fréquences est supérieur à celui des hautes fréquences, alors qu'en observant la courbe expérimentale du module complexe de la figure 9, on constate que le module complexe à basses fréquences est inférieur à celui des hautes fréquences. Donc nous pouvons conclure que le modèle de Zener ne peut pas représenter le comportement viscoélastique, nous allons continuer à étudier d'autres modèles.

IV-2-3-Modèles analogiques généralisés

Au vu des faiblesses observées pour les trois modèles étudiés précédemment, il est évident qu'ils s'adaptent très mal à nos données expérimentales et qu'ils ne peuvent pas fournir une bonne modélisation pour notre matériau. De ce fait, nous pouvons généraliser ces modèles en considérant un groupement quelconque des N éléments linéaires de type ressort ou amortisseur [36].

IV-2-3-1-Modèle de Maxwell généralisé

Ce modèle est formé d'un assemblage en parallèle de N modèle de Maxwell et élément élastique.



L'équation de comportement s'écrit :

$$\sum_{k=1}^{n}(\eta_k \frac{d\sigma}{dt} + E_k\sigma) = \sum_{k=1}^{n}(E_k\eta_k \frac{d\varepsilon}{dt} + E_0\eta_k \frac{d\varepsilon}{dt} + E_0E_k\varepsilon) \qquad (4.21)$$

La fonction de relaxation de cette équation est donnée par :

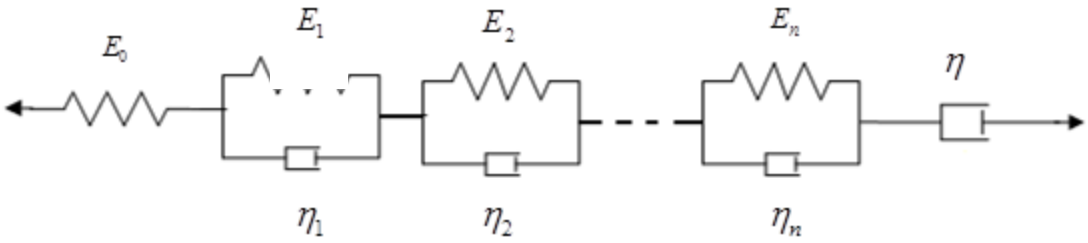
$$R(t) = E_0 + \sum_{k=1}^{n} E_k e^{-\frac{E_k}{\eta_k}t} \qquad (4.22)$$

Le module dynamique associé est donné par :

$$E^*(\omega) = E_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{i\omega\eta_k E_k}{E_k + i\omega\eta_k} \qquad (4.23)$$

IV-2-3-1-Modèle de Kelvin-Voigt généralisé

La généralisation du modèle de Kelvin-Voigt consiste en un assemblage en série de N éléments de Kelvin. Ce modèle est illustré par le schéma ci-dessous :



L'équation caractérisant la relation entre les contraintes et les déformations s'écrit :

$$\sum_{k=1}^{n}(\eta_k \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + E_k \frac{d\varepsilon}{dt}) = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\eta_k}{E_0}\frac{d^2\sigma}{dt^2} + (\frac{E_k}{E_0} + \frac{\eta_k}{\eta})\sigma + \frac{E_k}{\eta}\sigma\right] \qquad (4.24)$$

La fonction de retard de (4.24) est :

$$J(t) = \frac{1}{E_0} + \frac{t}{\eta} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{E_k}\left(1 - e^{-\frac{E_k}{\eta_k}t}\right) \qquad (4.25)$$

En appliquant la transformation de Carson sur l'équation (4.24) on trouve le module complexe correspondant de Kelvin-Voigt généralisé :

$$E^*(\omega) = \left[\frac{1}{E_0} + \frac{1}{i\omega\eta} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{E_k + i\omega\eta_k}\right]^{-1} \qquad (4.26)$$

Les modèles analogiques généralisés donnent une bonne description du comportement pour une grande variété de matériaux viscoélastiques car il s'agit tout simplement des extensions des modèles simples vus précédemment mais avec un plus grand nombre des paramètres à déterminer. Cependant l'identification de ces paramètres est onéreuse numériquement. Pour limiter le nombre de paramètres nécessaire, nous proposons d'autres modèles mathématiques dits des modèles paramétriques complexes plus élaborés que ces modèles analogiques généralisés permettant de mieux approximer la réalité avec des expressions assez simples.

IV-3-Modèles mathématiques

IV-3-1-Modèle ADF ou à champ de déplacement augmenté

Le modèle ADF (Anelastic Displacement Field) permet de prendre en compte la dépendance fréquentielle des paramètres. Il est basé particulièrement sur des principes thermodynamiques, le modèle à champ de déplacement anélastique est une extension tridimensionnelle du modèle ATF (Augmented Thermodynamic Field) [37]. Avec ce modèle ADF, nous pouvons séparer la déformation du matériau en une contribution élastique

instantanée et en une contribution anélastique permettant de prendre en compte le caractère viscoélastique. Le module dynamique pour ce modèle est donné par :

$$E^*(\omega) = E_0(1+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k \frac{\omega^2 + i\omega\beta_k}{\omega^2+\beta_k^2}) \qquad (4.27)$$

Avec α_k la résistance de relaxation et β_k l'inverse du temps caractéristique de relaxation, obtenus par identification du module de cisaillement mesuré. Nous pouvons aussi introduire le paramètre γ_k qui décrit le couplage entre la relaxation et le déplacement, défini par l'expression :

$$\gamma_k = \frac{1+\sum_k \alpha_k}{\alpha_k} \qquad (4.28)$$

Ce paramètre peut être considéré comme le rapport du module anélastique et du module élastique. Le modèle ADF sépare également la réponse viscoélastique en deux contributions, une partie élastique instantanément proportionnelle à la contrainte et une partie anélastique représentant la relaxation.

IV-3-2-Modèle de Golla-Hughes-Mac Tavish

Le modèle GHM du nom de ses inventeurs Golla-Hughes-Mac Tavish [38], [39]. Il caractérise le comportement viscoélastique par une fonction de relaxation. Par analogie, on peut le représenter par une association des modèles rhéologiques, et l'identifier par les paramètres α, β et γ de GHM. On utilise très souvent le terme mimi oscillateur pour designer chacun des termes de la somme de la fonction de relaxation, pour mieux approcher le comportement réel d'une structure viscoélastique, nous devons utiliser au moins trois mini oscillateurs [40], soit un modèle à 9 paramètres. Le module complexe de ce modèle GHM s'écrit :

$$E^*(p) = E_0(1+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k \frac{p^2 + 2\beta_k\gamma_k p}{p^2+2\beta_k\gamma_k p+\gamma_k^2}) \qquad (4.29)$$

Avec $p = i\omega$ une variable complexe.

IV-3-3-Modèles fractionnaires

BAGLEY et TORVIK, dans leurs travaux [30] [41] [42] [43] et [44], présentent une différente approche du modèle viscoélastique linéaire. Le comportement viscoélastique est régi par une loi empirique basée sur les dérivées fractionnaires et définie par la relation contrainte-déformation suivante :

$$\sigma(t)+\sum_{k=1}^{N} a_k \frac{d^{\alpha_k}}{dt^{\alpha_k}}\sigma(t) = E_0\varepsilon(t)+\sum_{k=1}^{N} b_k \frac{d^{\beta_k}}{dt^{\beta_k}}\varepsilon(t) \qquad (4.30)$$

où α_k et β_k sont des valeurs fractionnaires comprise entre 0 et 1.

Se basant sur des observations et résultats expérimentaux, BAGLEY et TORVIK ont constaté que, pour beaucoup de matériaux viscoélastiques, seul le premier terme de chaque série de l'équation (4.30) est pris en considération [8], le cas échéant la relation (4.30) se réduit à :

$$\sigma(t)+a\frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}}\sigma(t) = E_0\varepsilon(t)+b\frac{d^{\beta}}{dt^{\beta}}\varepsilon(t) \qquad (4.31)$$

Transposée dans le domaine fréquentiel, l'équation (4.31) nous permet d'obtenir le module complexe du modèle fractionnaire :

$$E^*(\omega) = \frac{E_0+b(i\omega)^{\beta}}{1+a(i\omega)^{\alpha}} \qquad (4.32)$$

Ce modèle est caractérisé par cinq paramètres seulement : E_0, a, b, α et β.

Partant des résultats expérimentaux, T. VINH [45] approche la courbe du module complexe par une fonction de la forme :

$$F(p) = \prod_{k=0}^{N}(1+(T_k p)^{\beta_k})^{\pm 1} \qquad 0 \prec \beta_k \prec 1 \qquad (4.33)$$

La représentation bilogarithmique de l'image de Carson de la fonction de relaxation, présentant des asymptotes horizontales pour de faibles et grandes valeurs de fréquence, montre par là que les deux paramètres exponentiels α et β sont sensiblement de même

valeur. On retrouve bien cette remarque dans les résultats de BAGLEY et TORVIK [30], [41] sur du verre mélangé à des oxydes d'aluminium de sodium et de cobalt.

Le module complexe (4.32) peut donc être représenté dans le cas où $\alpha \simeq \beta$ par la formule :

$$E^*(\omega) = E_0 \frac{1+(iT_0\omega)^\alpha}{1+(iT_1\omega)^\alpha} \qquad (4.34)$$

avec T_0 et T_1 représentant le temps des points de coupure, où leurs inverses sont les fréquences de coupure de la courbe représentative du module.

Le nombre de paramètres de caractérisation de ce modèle est ainsi réduit à quatre (le minimum possible). Le modèle à dérivées fractionnaires ne permet pas l'utilisation des exponentielles pour les fonctions mémoires (fluage et relaxation). Toutefois l'utilisation des exponentielles n'est pas impérative dans le calcul numérique. De ce fait, nous allons mettre au point les méthodes qui vont nous permettre d'identifier les paramètres de ce type de modèle.

IV-4-Procedures d'identifications des paramètres

IV-4-1-La méthode graphique d'évaluation des paramètres E_0, ω_0, ω_1 et α

La figure 14 ci-dessous illustre la technique que nous appliquons pour l'évaluation des paramètres de modèles mathématiques.

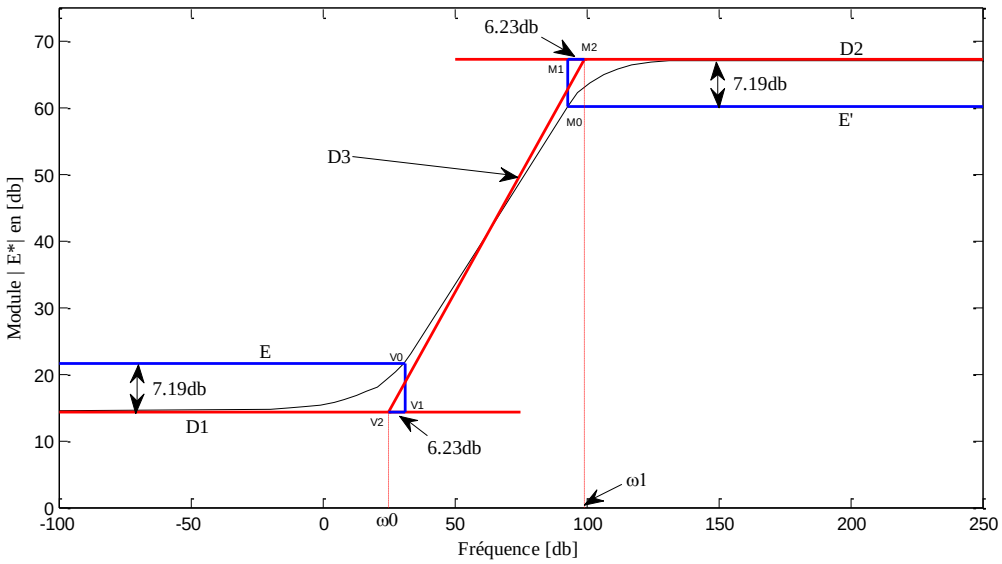


Figure 14 : Technique d'évaluation des paramètres E_0 ,ω_0,ω_1 et α

$E_0 = 14.348db$, $\omega_0 = 24db$, $\omega_1 = 99db$, $E_\infty = 67.3db$ et $\alpha = 0.7$

Principe : Nous traçons en décibel la courbe expérimentale du module complexe $\left|E^*(\omega)\right|$, en suite on trace l'asymptote horizontale inférieure (D1) qui représente la valeur E_0 du module et l'asymptote horizontale supérieure (D2) celle du module maximal $E_{\max}$. Grace au diagramme $\left[6.23db, 7.19db\right]$, on trace une droite $E = E_0 + 7.19db$ qui coupe la courbe expérimentale en un point V_0 , l'image de ce point projeté perpendiculairement sur (D1) est le point V_1, on trace une droite perpendiculaire à (D1) passant par un point V_2 distant de $-6.23db$ de V_1. Ce point V_2 représente le premier point de coupure qui nous donne directement la fréquence de coupure ω_0. Pour déterminer la deuxième fréquence de coupure ω_1, on trace une autre droite $E' = E_{\max} - 7.19db$ qui coupe la courbe expérimentale en un point M_0 qu'on projette perpendiculairement sur la droite (D2) en un point M_1. On fixe un point M_2 à droite du point M_1 sur la droite (D2), ce point M_2 représente le deuxième point de coupure, son abscisse est égale à ω_1. Le paramètre α est la pente de la droite (D3) qui passe par les points de coupures $\left(V_2, M_2\right)$.

IV-4-2-Méthode numérique d'évaluation des paramètres

La technique est inspirée de la méthode graphique. Disposant d'une courbe discrète de valeurs expérimentales, nous commençons par faire un lissage et en suite approcher cette courbe à l'aide d'une fonction continue : polynôme orthogonaux simples, de Legendre, ou de Tchebychev…

Ayant les valeurs des deux asymptotes horizontales, nous déterminons les deux points fixes par balayage. Ces deux derniers nous permettent d'évaluer les deux points de coupure.

L'exposant α est trouvé par calcul numérique de la pente, CARNAHAN [46], de la droite passant par les deux points de coupure.

Le paramètre E_0 est la valeur de l'asymptote horizontale inférieure.

Ayant estimé les différentes paramètres fractionnaires, nous les améliorons en utilisant la méthode des moindres carrés qui consiste à minimiser la distance entre les valeurs expérimentales et les valeurs théoriques correspondantes. Le choix de cette distance est important et définit le critère de convergence. Dans notre cas, les mesures nous donnent les valeurs expérimentales du module complexe pour les différentes valeurs ω_n de la pulsation : $E^*(\omega_n) = X^*(\omega_n) + iY^*(\omega_n)$ avec $n = 1,...,M$. On cherche les valeurs des paramètres du modèle qui minimisent l'écart entre le module complexe expérimentale $E^*(\omega)$ et le module complexe théorique $E(\omega)$. Cet écart est défini par la relation :

$$\left\| E^* - E \right\|^2 = \sum_{n=1}^{M} \left[(X^*(\omega_n) - X(\omega_n))^2 + (Y^*(\omega_n) - Y(\omega_n))^2 \right] \qquad (4.35)$$

Si les paramètres définissant le modèle interviennent de façon linéaire dans l'expression du module complexe théorique $E(\omega)$, ce problème de minimisation conduit à un système linéaire par rapport à ces paramètres. Il y a alors une solution unique si les données expérimentales sont indépendantes.

Dans le cas où les paramètres interviennent de façon non linéaire, on utilise une méthode itérative et pour que cette méthode ait des chances de converger vers les valeurs espérées, on initialise l'itération avec un jeu de paramètres assez proche du jeu des

paramètres optimaux. Il est alors nécessaire de se servir des propriétés du modèle pour trouver des valeurs initiales raisonnables.

IV-5-Résultats

En utilisant la courbe expérimentale du module complexe de Young de la figure 9, les simulations que nous avons effectuées dans les paragraphes précédents nous ont permis de déterminer les quatre paramètres du Paracril BJ0 PHR Carbone du modèle fractionnaire:

$E_0 = 5.217 MPa$

$\alpha = 0.7 \qquad (\alpha = \beta)$

$\omega_0 = 16 Hz \qquad (\tau_0 = 6.25 \times 10^{-2} s)$

$\omega_1 = 89125 Hz \qquad (\tau_1 = 1.122 \times 10^{-5} s)$

Ainsi donc le module complexe théorique de Young du Paracril BJ0 PHR Carbone permettant de tracé nos courbes théoriques du modèle fractionnaire est donné par la formule suivante :

$$E^*(\omega) = 5.217 \frac{1 + 0.143587(i\omega)^{0.7}}{1 + 3.42768 \times 10^{-4}(i\omega)^{0.7}} MPa$$

Pour le modèle ADF (Anelastic Displacement Field), en se limitant au premier terme de la somme de l'équation (4.27), nous obtenons les paramètres E_0, α_1 et β_1 :

- $E_0 = 5.217 MPa$
- La résistance de relaxation $\alpha_1 = 444.2$;
- L'inverse du temps caractéristique $\beta_1 = \omega_1 = 89125 Hz$

$$E^*(\omega) = 5.217 \left[1 + 444.2 \frac{\omega^2 + i(89125\omega)}{\omega^2 + (89125)^2} \right] MPa$$

IV-6-Comparaison des modèles ADF et fractionnaire avec nos résultats expérimentaux

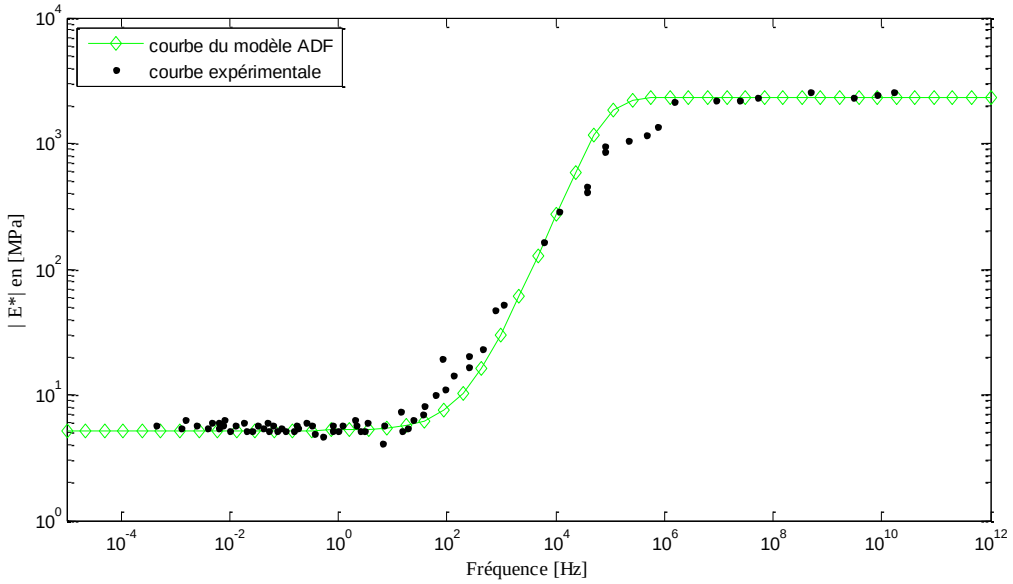


Figure 15 : Courbes de module complexe du modèle ADF et expérimentale

Echelle : Log-Log

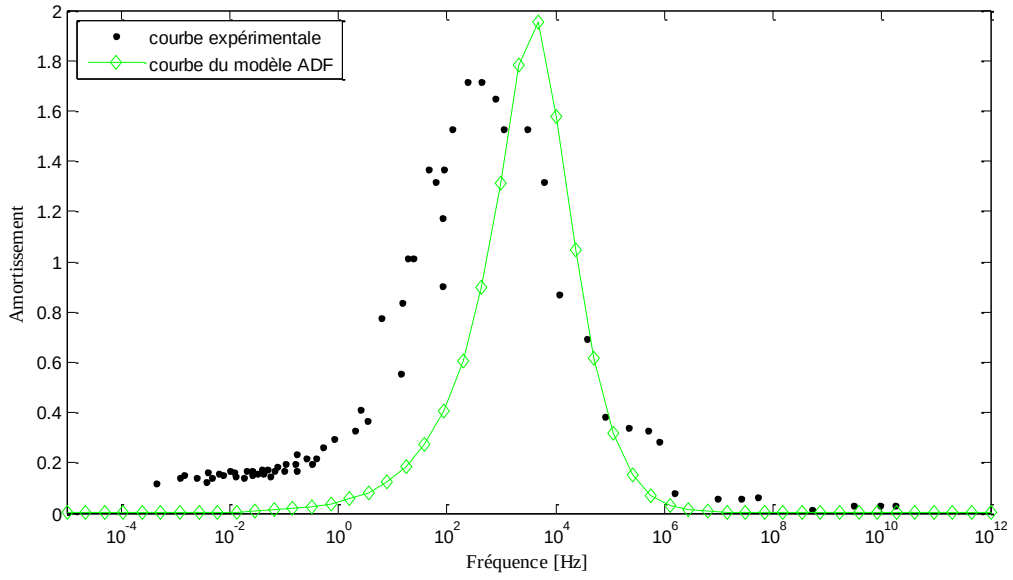


Figure 16 : Courbes d'amortissement du modèle ADF et expérimentale

Echelle : Log-Lin

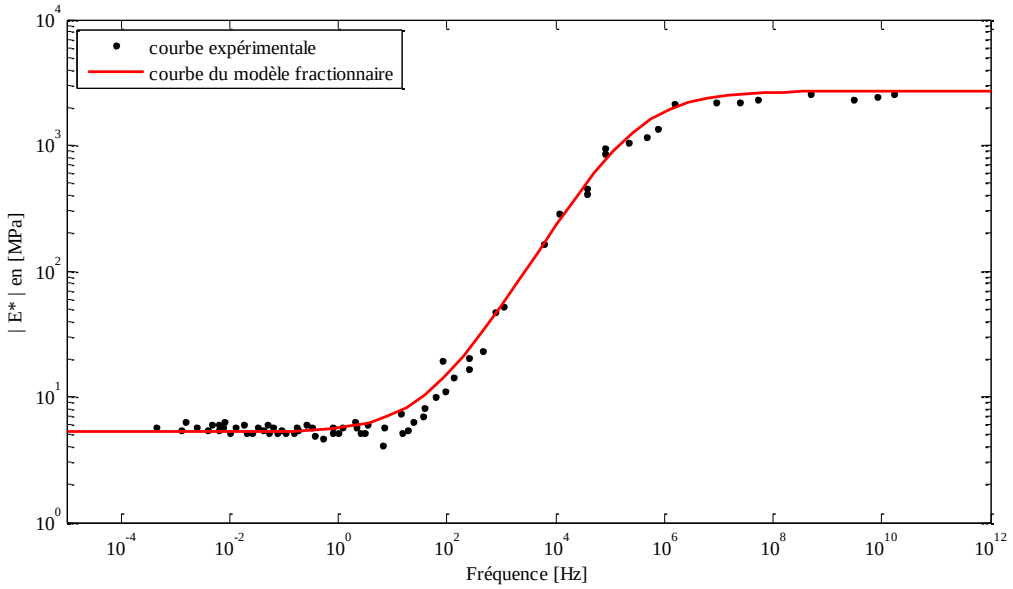


Figure 17 : Courbes de module complexe du modèle fractionnaire et expérimentale

Echelle : Log-Log

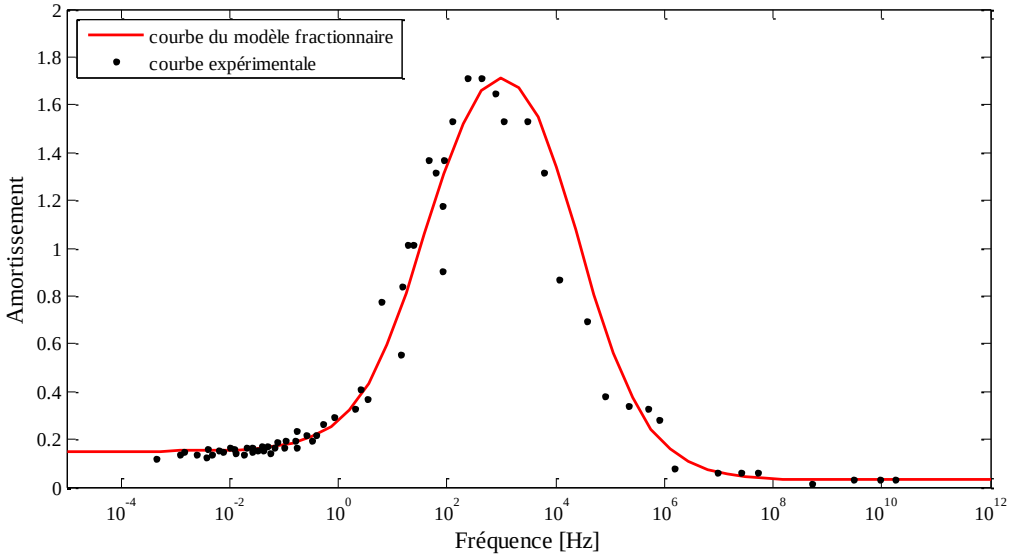


Figure 18 : Courbes d'amortissement du modèle fractionnaire et expérimentale

Echelle : Log-Lin

IV-7-Analyse des résultats

Dans le tableau 2 ci-dessous, nous avons comparé les paramètres rhéologiques du Paracril BJ0 PHR Carbone obtenus par nos calculs à ceux trouvés par T. BEDA et Y. CHEVALIER dans leur article de 2008.

Tableau 2 : Comparaison des paramètres rhéologiques du Paracril carbone

	Nos paramètres calculés	Paramètres trouvés par T.BEDA et Y. CHEVALIER	Erreurs relatives
E_0 en [MPa]	5.217	5.238	0.4%
ω_0 en [Hz]	16	14	12.5%
ω_1 en [Hz]	89125	86020	3.48%
α	0.7	0.6951	0.7%

Conclusion :

Les fonctions de fluage et de relaxation des modèles analogiques classiques ne sont pas adaptées à nos mesures expérimentales, et même les modèles généralisés de Maxwell et Kelvin ne décrivent pas exactement le comportement viscoélastique de notre matériau. Les modèles mathématiques sont très intéressants mais certains d'entre eux présentent des difficultés à pouvoir évaluer leurs paramètres comme celui de Golla-Hughes-Mac Tavish (Modèle GHM), le modèle ADF (Anelastic Displacement Field) aussi n'arrive pas à décrire correctement les courbes expérimentales du module complexe et celle du coefficient d'amortissement du matériau, cela nous éloigne de la réalité. Nous pouvons donc retenir le modèle à dérivée fractionnaire car ses paramètres sont moins nombreux et facilement évalués, ses courbes représentatives sont à peu près les mêmes que celles obtenues expérimentalement. La comparaison de l'amortissement expérimental et celui déduit de la fonction analytique (calcul fractionnaire) est vérifiée, ceci permet de valider ce modèle à dérivée fractionnaire.

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES :

Le but de ce travail était de modéliser le comportement dynamique des matériaux à mémoire c'est-à-dire le phénomène de fluage et de relaxation des élastomères. Une première étape d'analyse bibliographique a permis de dresser l'état de l'art des approches qualitatives et quantitatives utilisées dans la modélisation du comportement différé des élastomères. Cette partie a mis en évidence l'influence des certains paramètres comme la température, la fréquence et l'amplitude d'excitation du matériau poussant à fixer des hypothèses pour pouvoir vérifier les différentes formulations théoriques du problème viscoélastique.

Dans la deuxième étape, les formules de la complaisance de fluage et le module de relaxation sont développées et résolues par les méthodes analytiques en fonction du temps et des fréquences. Nous avons aussi effectué une analyse détaillée des qualités respectives des modèles existants qui nous a permis de déterminer le modèle qui nous semblait le plus approprier pour décrire le comportement viscoélastique de notre matériau. Le modèle à dérivées fractionnaires répondant aux qualités requises a été retenu car il permet de réduire considérablement le nombre de paramètres caractérisant le comportement du matériau. Ceci rend son utilisation assez simple pour l'évaluation des modules complexes sur une large bande de fréquence, au-delà des fréquences expérimentales d'acquisition. Il permet également, à partir de la seule connaissance de la valeur absolue du module complexe, de pouvoir déterminer l'amortissement du matériau, l'évaluation assez facile des fonctions de fluage ou de relaxation par le peu de paramètres exigés. Cela atteste donc son efficacité à prédire le comportement viscoélastique dans le cas d'une sollicitation harmonique.

En perspectives, plusieurs pistes d'approfondissement et d'élargissement de ce travail sont envisageables : modéliser le comportement non linéaire en 3D des matériaux viscoélastiques aux formes plus complexes, étudier ce comportement en grandes déformations, la prise en compte des phénomènes thermiques c'est-à-dire dans le où la température varie avec le temps, étudier aussi les phénomènes de fluage et de relaxation suivant les directions transversales.

Les limitations expérimentales et théoriques confrontées nous amènent à signaler que la modélisation du comportement viscoélastique des élastomères reste toujours un domaine ouvert.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. KOSCHER : *Etude de l'extrusion monovis de mélanges d'élastomères (approche expérimentale et simulation numérique).* Thèse de doctorat de l'école nationale sup. des mines de Paris : soutenu le 03 février 2003.

[2] S. MEO : *Modélisation numérique du comportement mécanique de structure en élastomère* : de l'élastomère à la thermo-visco-hyperélasticité. Thèse de doctorat de l'univ. de la méditerranée-Aix Marseille II : soutenu le 01 décembre 2000.

[3] H. GACEM : *Comportement visco-hyperélasticité des élastomères*. Thèse de doctorat de l'univ. de Pierre & Marie curie Paris VI : soutenu le 12 décembre 2007.

[4] JOHN D. FERRY: *Viscoelastic properties of polymers*, 3e éd., p. 110, 136, 47, John Wiley & Sons, New York, 1980.

[5] E.E. UNGAR: *Damping of Panels*, p. 434-455, dans Noise and Vibration Control, éd. L.L. Beranek, McGraw-Hill, New York, 1971.

[6] CHARLES B. ARENDS: *Polymer toughening*, p. 33, 7, 8, 25, Marcel Dekker, New York, 1996

[7] M. FONTANILLE et Y. GNANOU : *Chimie et physico-chimie des polymères*, p. 400-436, Dunod, Paris, 2002.

[8] T. BEDA : *Modules complexes des matériaux viscoélastiques par essais dynamiques sur les tiges petites et grandes déformations (modélisation, instrumentation, caractérisation)*. Thèse de doctorat du conservatoire national des arts et métier de paris : soutenu le 22 janvier 1990.

[9] T. KAHN and K. J. KIM : *Sensitivity analysis for estimation of complex modulus of viscoelastic materials by non resonant method*. Journal of sound and vibrations, 176 (4): p. 545-561, 1994.

[10] A. E. H. LOVE: *A treatrise on the mathematical theory of elasticity*. Cambrige Univ. press, 1927.

[11] D. K. RAO, J. S. RAO: *Free and forced vibrations of rods according to Bishop's theory*. Journal of the Acoustical Society of America (J.A.S.A), vol.56, n°6, December 1974, pp.1792-1800.

[12] A. RENAULT: *Caractérisation des mécaniques dynamiques de matériaux poro-viscoélastiques*. Thèse de doctorat de Sherbrooke : soutenu le 12 décembre 2008.

[13] B. de SAINT VENANT : *Mémoire sur les vibrations tournantes des verges élastiques*. Compte rendus, vol.28, Paris 1849, pp.69-72.

[14] J. SALENCON : *Viscoélasticité pour le calcul des structures*. Editions de l'école polytechnique – Mai 2009, 19128 Palaiseau cedex.

[15] S. TIMOSHENKO : *Théorie de l'élasticité*. Béranger, Paris 1961.

[16] D. LE NIWERHY, Y. CHEVALIER, T. VINH : *Vibration de flexion des poutres anisotrope en matériaux composites* : application à la détermination des modules d'Young, science et technologie de l'armement, 54, 2e fascicule, 1981, pp.291-324.

[17] O. SANDA : *Etude et caractérisation des matériaux à mémoire courte*. Mémoire de master II de l'univ. de Ngaoundéré, 2009.

[18] VINH : *Essais dynamiques des matériaux viscoélastiques (conception, mesures et interprétation)*. Session CESMI du 17 au 19 mai 1988. ISMCM St Ouen. Publication de T. Vinh. ISMCM.

[19] G'SELL C., HIVER J. M., el al. (2002): Experimental characterization of deformation damage in solid polymers under tension, and its interrelation with necking. *International Journal of Solids and Structures, vol.39, p.3857-3872*

[20] QUOC VIET LE : *Modélisation multi-échelle des matériaux viscoélastiques hétérogène*. Thèse de doctorat de l'univ. De paris-Est. Soutenu le 15 janvier 2008

[21] YAO KOUTSAWA : *Modélisation et conception multi-échelles des matériaux : de la description atome discrète au modèle du continu. Application aux propriétés amortissantes*

des pare-brises. Thèse de doctorat de l'univ. De Paul Verlaine de Metz soutenue le 10 novembre 2008.

[22] LIOUVILLE : *Mémoire sur le calcul des différentielles à indices quelconques*. Journal de l'école Polytechnique, 13 :71-162, 1832.

[23] K. B. OLDHAM and J. SPANIER. *The fractional calculus*. Academic Press, New-York, London, UK, 1974

[24] A. OUSTALOUP. *La dérivation non entière, théorie, synthèse et applications*. HERMES, London, UK, 1999.

[25] I. PODLUBNY. *Fractional differential equations*. Academic Press, New York,London, UK, 1999.

[26] J.O. ONOBIONO : *sur la torsion dynamique des poutres anisotropes de section rectangulaire*. Thèse de doctorat de 3ème cycle, université Pierre et Marie Curie, Paris, 1978.

[27] D.R. BLAND : *The theorie of lenear viscoelasticity*, Pergamon Press, Oxford, London, New-York, Paris, 1960.

[28] R.M. CHRISTENSEN: *Mecanics of composite materials*, wiley inerscience New-York 1979.

[29] E. VOLTERRA, E.C. ZACHMANOGLOU: *Dynamic of vibration*, E.merrils Books Inc. Columbus, Ohio, 1965.

[30] R.L. BAGLEY and TORVIK: *Fractional calculus – A different approach to the analysis of viscoelastically damped structures*. American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA) Journal vol.21, n°5, May 1983, pp.741-748.

[31] R.C. KOELLER: *Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity*. Journal of applied Mecanics (JAM), vol.51, June 1984, pp.299-307.

[32] W. SMIT and H. de VRIES: *Rheological models containing fractional derivatives* . Rheological Act vol.90, 1970, pp.525-534.

[33] CHRISTENSEN, R.M., 2005b. *Theory of Viscoelasticity*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY.

[34] T. BEDA et al : *Definite deformation and viscoelasticity modeling and test*. Journal/engineering2011,3,810-814 published online august 2011

[35] T. BEDA et YVON CHEVALIER: *Fractional derivative in materials and structures vibratory behaviour* : Identification methods. Equipe vibroacoustique du Lismma. RS-JESA-42/2008 Lavoisier, Paris. Fractional order systems, pp 863-877

[36] J. MANDEL : *cours de mécanique des milieux continus*. Tome II, Gauhtiers-villars, Paris, France, 1966.

[37] G.A. LESIEUTRE : *Finite element for dynamic modeling of uniaxial rods with frequency-dependent material properties*. International journal of solids and structures, 29 :1567-1579, 1992

[38] D.F. GOLLA et P.C. HUGHES: *Dynamics of viscoelastic structures – a time-domain, finite element formulation*, ASME Journal of Applied Mecanics, 52 :897-906, 1985

[39] D.J. Mc TAVISH et P.C. HUGHES: *Modeling of linear viscoelastic space structures*. Journal of vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, pages 103-110, 1993

[40] J. SALMANOFF : *A finite element, reduced order, frequecy dependence model of viscoelastic damping*. Mémoire de D.E.A. Faculty of Virginia Polytechnic Institute, Sept. 1997

[41] R.L BAGLEY: *A theorical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity*. Journal of Rheology, vol.27 n°3, June 1983, pp.201-210.

[42] P.J TORVIK and R.L. BAGLEY: *On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials*. Journal of Applied Mecanics: vol.51, June 1984, pp. 294-298.

[43] P.J TORVIK and R.L. BAGLEY: *Fractional calculus in the transient analysis of viscoelasticity damped structures*. AIAA Journal vol. 23, n°6, June 1985, pp.918-925.

[44] R.L BAGLEY and BAGLEY: *A generalized derivative model for an elastomer damped*. The shock and vibration bulletin, n°49, part II, September 1979, pp. 135-143.

[45] N.P.T. VINH : *Sur le passage du régime harmonique au régime transitoire viscoélastique*. Memorial de l'Artillerie française, 3^{e} fasci., 1967.

[46] B. CARNAHAN, H.A. LUTTHER, J.O. WILKES: *Applied numerical method*. Wiley, New-York, 1965.

[47] G'SELL C. (1982) : *plastic deformation and semi-cristalline materials*. Les Ulis : Les éditions de physique, p.40